

NUCLEO TEMATICO 4:

RELAZIONI E FUNZIONI

1. Descrizione	1
2. Esempi di quesiti	4

1. DESCRIZIONE

INTRODUZIONE

È utile che tu abbia familiarità con il concetto di funzione tra insiemi e in particolare con il concetto di funzione di una variabile reale a valori reali, e conosca il linguaggio elementare delle funzioni; che tu sappia utilizzare e leggere diverse rappresentazioni di una stessa funzione: espressione analitica, grafico nel piano cartesiano, tabella di valori, descrizione verbale... È importante che tu abbia familiarità con il grafico e le proprietà elementari di semplici funzioni algebriche e trigonometriche, e delle funzioni esponenziale e logaritmo in diverse basi. È importante infine che tu sappia utilizzare il linguaggio delle funzioni per esprimere relazioni tra grandezze e le loro variazioni in diversi contesti.

CONOSCENZE

- Relazioni e funzioni, funzioni di una variabile reale a valori reali, variabile dipendente e variabile indipendente, grafico di funzioni.
- Dominio, insieme-immagine, immagine di un valore della variabile indipendente, controimmagine di un valore della variabile dipendente.
- Somma, differenza, prodotto, rapporto e composizione di funzioni.
- Iniettività, massimi e minimi, intervalli di monotonia.
- Studio della risolubilità di equazioni e disequazioni per via grafica.
- Funzioni algebriche: $f(x) = ax + b$; $f(x) = a/x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$;
 $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- Valore assoluto, funzioni esponenziale e logaritmo, funzioni trigonometriche.

ABILITÀ

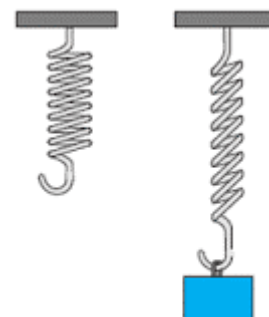
- RF-1 Comprendere che una funzione associa a ogni elemento di un insieme un unico elemento di un altro insieme. Utilizzare i termini e le notazioni proprie del linguaggio delle funzioni. Interpretare la valutazione di un'espressione come funzione. Comprendere il processo inverso e, quando possibile, interpretarlo come funzione inversa. Usare valutazioni in successione per comporre funzioni.
- RF-2 Operare con funzioni definite come prodotto o somma di una funzione reale di variabile reale per un numero reale, o come somma, differenza, prodotto, rapporto o composizione di due funzioni reali di variabile reale.
- RF-3 Riconoscere nella rappresentazione nel piano cartesiano del grafico di una funzione reale f di variabile reale l'insieme dei punti della forma $(x, f(x))$ con x appartenente al dominio di f .
- RF-4 Interpretare e mettere in relazione diverse rappresentazioni relative a una stessa funzione: espressione analitica (eventualmente espressa a tratti), grafico nel piano cartesiano, tabella di valori, descrizione verbale.
- RF-5 Riconoscere caratteristiche e proprietà di una funzione a partire da una rappresentazione del suo grafico nel piano cartesiano come, ad esempio, il dominio e l'immagine, immagini e controimmagini di particolari numeri reali, massimi e minimi relativi, intervalli di monotonia.
- RF-6 Rappresentare il grafico di una funzione nel piano cartesiano a partire da alcune sue caratteristiche e proprietà note come, ad esempio, il dominio e l'immagine, immagini di particolari numeri reali, massimi e minimi relativi, intervalli di monotonia.
- RF-7 Rappresentare, a partire dal grafico di una funzione $f(x)$ nel piano cartesiano, il grafico delle funzioni $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$, $f(kx)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, con k numero reale; viceversa, individuare tali funzioni, a partire dal loro grafico e da quello di $f(x)$.
- RF-8 Usare le rappresentazioni cartesiane di due funzioni f e g per studiare equazioni e disequazioni del tipo $f(x) = g(x)$ e $f(x) > g(x)$ e in particolare del tipo $f(x) = k$ e $f(x) > k$.
- RF-9 Esprimere il legame tra due grandezze proporzionali attraverso una funzione del tipo $f(x) = ax$ oppure $f(x) = a/x$.

- RF-10 Riconoscere e rappresentare nel piano cartesiano il grafico di $f(x) = |x|$ e di funzioni algebriche note come $f(x) = ax + b$; $f(x) = a/x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
- RF-11 Riconoscere e rappresentare nel piano cartesiano il grafico delle funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ e delle funzioni logaritmo $f(x) = \log_a x$, per qualsiasi valore reale positivo $a \neq 1$.
- RF-12 Conoscere il significato delle funzioni trigonometriche $f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \tan x$; $f(x) = \arctan x$ rispetto alla circonferenza goniometrica. Riconoscere e rappresentare nel piano cartesiano il grafico di queste funzioni.

2. ESEMPI DI QUESITI

Quesito 1

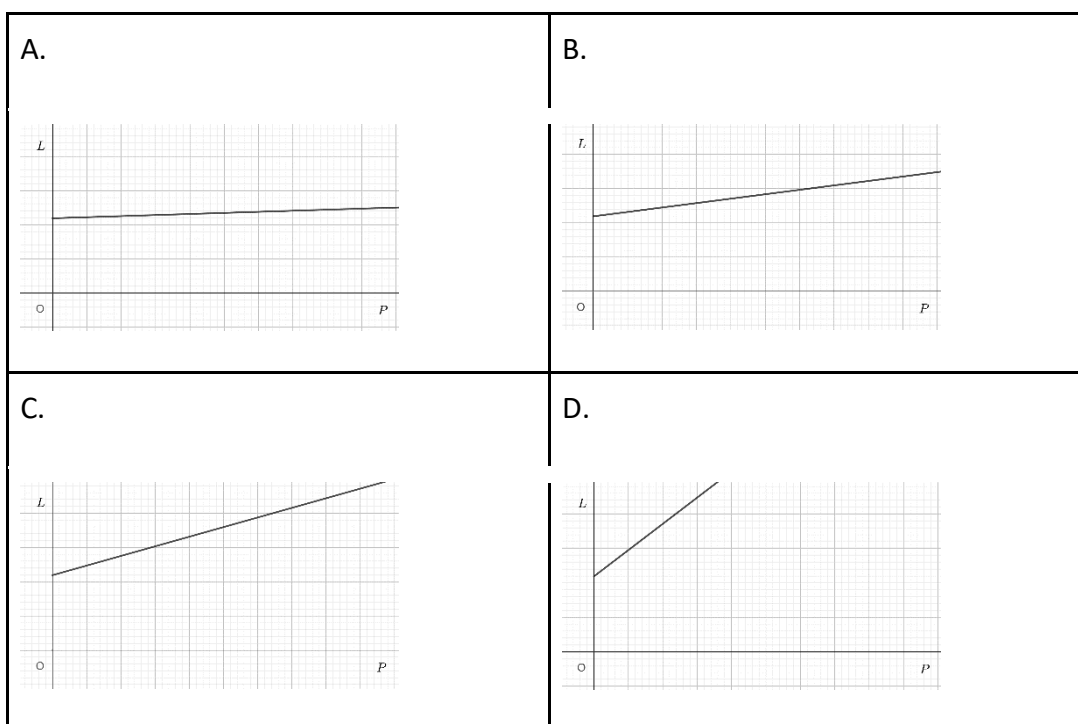
La lunghezza di una molla a cui viene appeso un corpo, come in figura, varia proporzionalmente al peso applicato. Indichiamo con L_0 la lunghezza della molla a riposo, quando non vi è applicato nessun corpo, e con k la costante di proporzionalità tra la variazione della lunghezza della molla e il peso del corpo agganciato alla molla.



- Esprimere la lunghezza L della molla in funzione del peso P applicato.

Ciascuno dei seguenti grafici rappresenta la lunghezza di una molla in funzione del peso a essa applicata, i grafici riguardano molle con ugual lunghezza a riposo ma differenti caratteristiche di elasticità.

- Qual è il grafico relativo alla molla che ha maggior resistenza alla trazione?



[Risposta esatta](#)

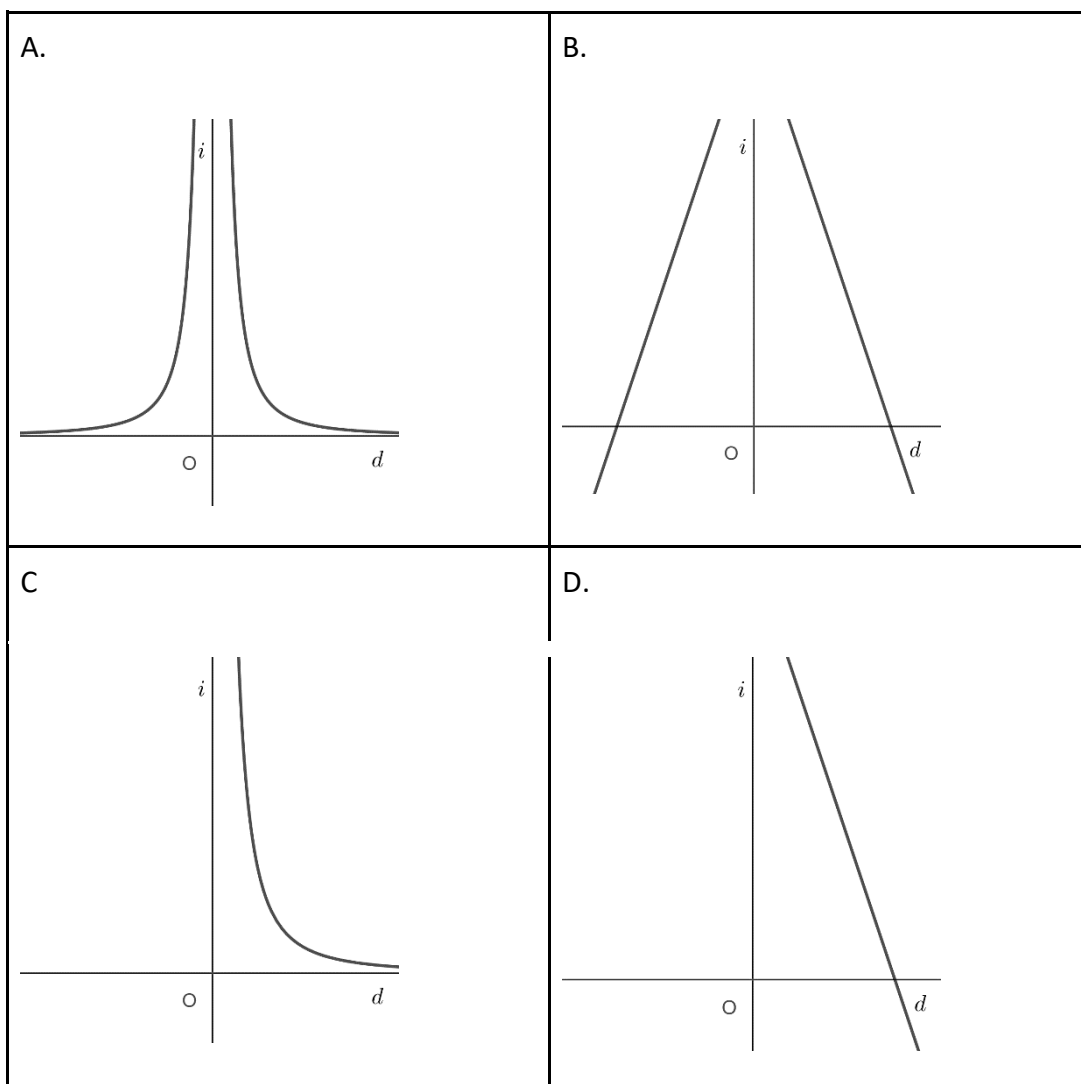
Abilità principali: **RF-4, RF-9**

Quesito 2

Una sorgente luminosa puntiforme è posta nel vuoto. L'intensità luminosa L misurata in un punto a distanza d dalla sorgente è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Se indichiamo con k la costante di proporzionalità, quale delle seguenti relazioni esprime l'intensità luminosa in funzione di d ?

- A. $L = k/d$
- A. $L^2 = k/d^2$
- B. $L = k/d^2$
- C. $L^2 = k/d$

Uno dei seguenti grafici rappresenta l'intensità luminosa dovuta a una sorgente puntiforme in funzione della distanza dalla sorgente medesima, quale?



[Risposta esatta](#)

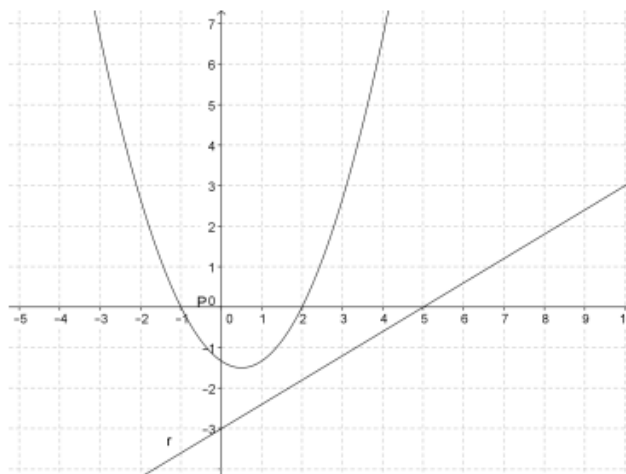
Ispirato A Prova Invalsi 2013, Grado 10

Abilità principali: **RF-4, RF-9, RF-5, RF-10**

Quesito 3

In figura sono rappresentate, nel piano cartesiano xOy , una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e una retta di equazione $y = mx + q$ con a, b, c, m, q numeri reali.

La disequazione $ax^2 + bx + c > mx + q$ nell'incognita x ha come soluzioni (nell'insieme dei numeri reali):



- A.** Tutti e soli i numeri reali x che verificano $x < -1$ o $x > 2$
- B.** Tutti e soli i numeri reali x che verificano $-1 < x < 2$
- C.** Nessun numero reale
- D.** Tutti i numeri reali

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-8**

Quesito 4

La disequazione $|-x| > x$ ha come soluzioni (nell'insieme dei numeri reali):

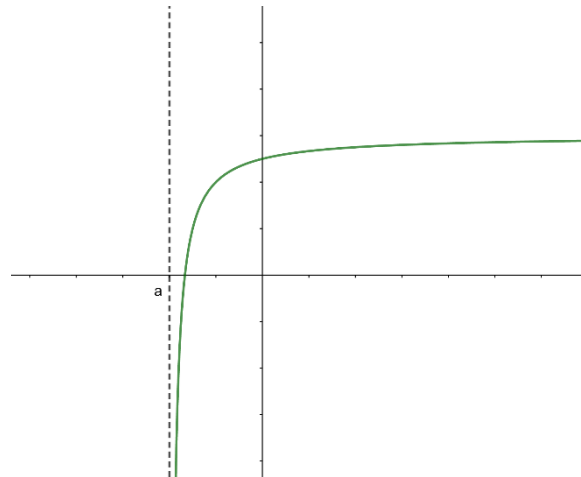
- A.** Tutti e soli i numeri reali diversi da 0
- B.** Tutti e soli i numeri reali strettamente maggiori di 0
- C.** Tutti e soli i numeri reali strettamente minori di 0
- D.** Nessun numero reale

[Risposta esatta](#)

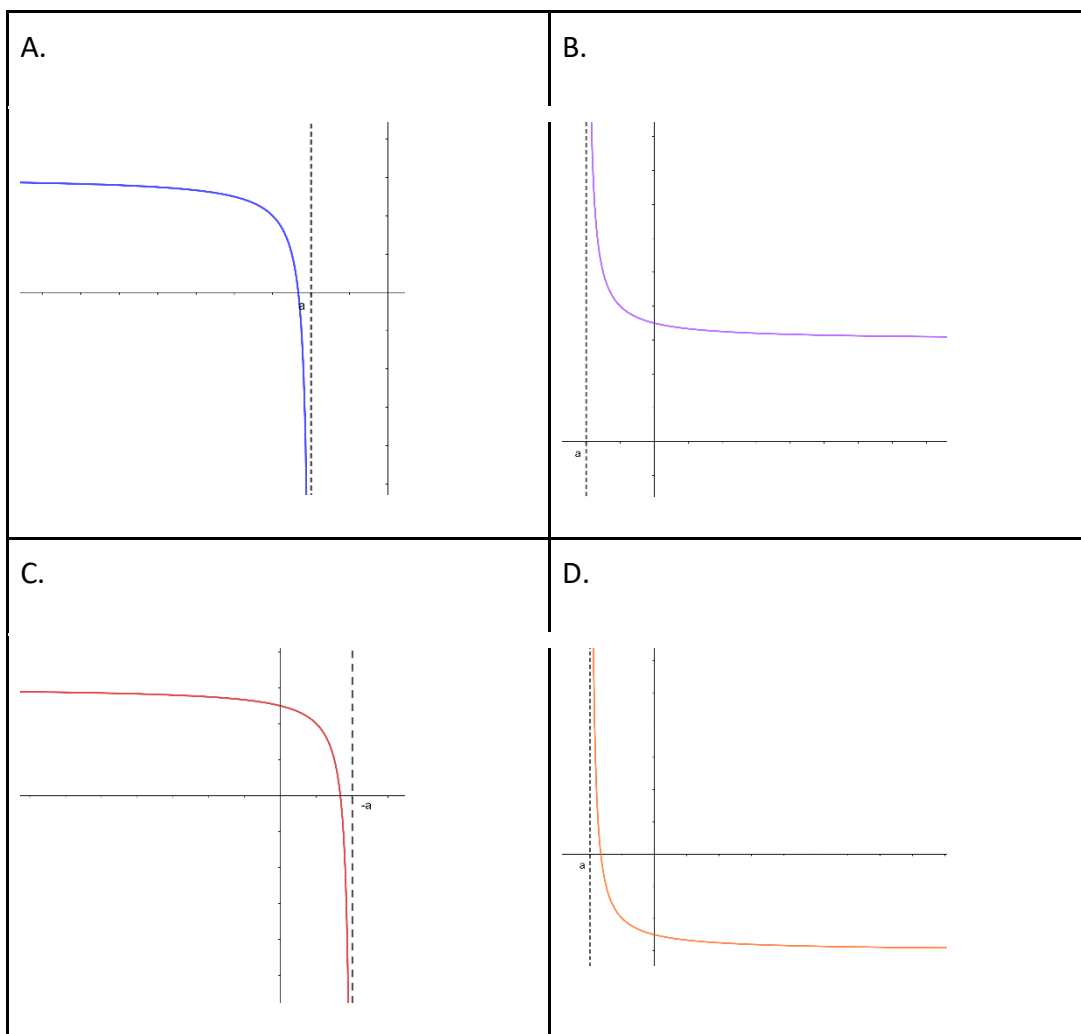
Abilità principali: **RF-10, RF-8, RF-7**

Quesito 5

In figura è rappresentato il grafico di una funzione $f(x)$ definita sull'insieme dei numeri reali maggiori di a .



Quale dei seguenti grafici rappresenta la funzione $g(x) = f(-x)$?

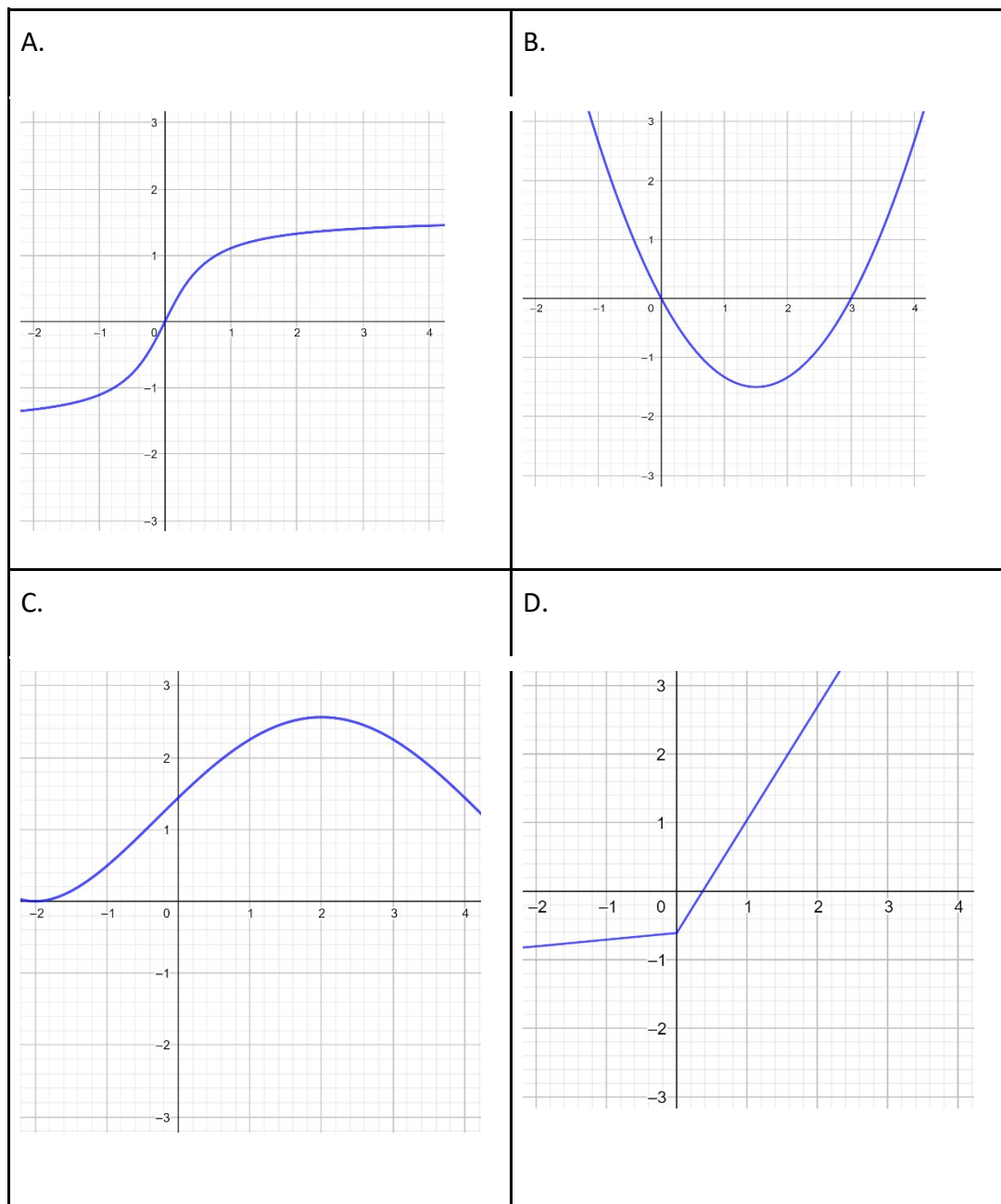


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-7**

Quesito 6

Quali tra i seguenti grafici rappresentano funzioni che nell'intervallo $[-1; 2]$ sono iniettive?



[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-5**

Quesito 7

Dire quale/i delle seguenti relazioni definisce/ono una funzione con p variabile indipendente e q variabile dipendente:

- A.** q è il numero di divisori positivi del numero intero positivo p
- B.** q è l'area di un poligono che ha perimetro p
- C.** p e q sono soluzioni dell'equazione $pq = 1$
- D.** la somma tra p e q è un numero primo

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-1**

Quesito 8

Il codice fiscale è un codice alfanumerico di 16 caratteri utilizzato ai fini fiscali ed amministrativi per identificare i cittadini italiani. Generalmente, il codice fiscale è così composto:

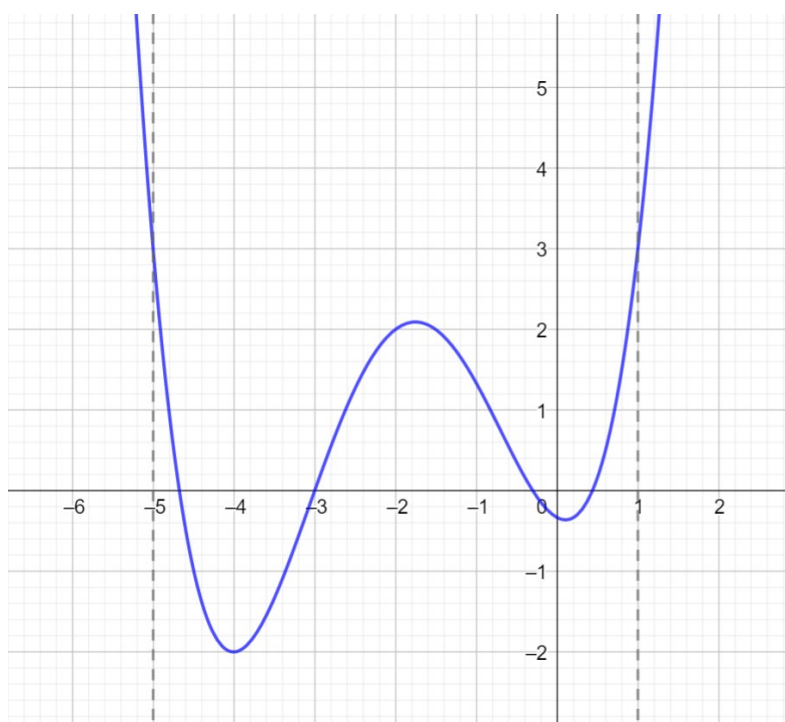
- tre lettere del cognome (prima, seconda e terza consonante);
 - tre lettere del nome (prima, terza e quarta consonante);
 - le ultime due cifre dell'anno di nascita;
 - una lettera per il mese di nascita (A = gennaio, B, C, D, E, H, L, M, P, R, S, T = dicembre);
 - due cifre per il giorno di nascita: in caso di persone di sesso femminile si aggiunge 40, ad esempio se una donna è nata il 12 del mese il suo codice fiscale conterrà il numero 52;
 - un codice di quattro caratteri che identifica in modo univoco il comune di nascita;
 - un carattere di controllo, per verificare la correttezza del codice fiscale.
1. È possibile assegnare un codice fiscale a ciascun individuo attenendosi rigidamente a queste regole senza eccezioni?
 2. Se si seguono queste regole senza prevedere eccezioni, è possibile che i primi 15 caratteri siano in comune a più persone?
 3. Un uomo e una donna possono avere i medesimi 15 caratteri iniziali?
 4. Una stringa di 11 caratteri composta da: 6 consonanti, 2 cifre, una lettera, 2 cifre, è necessariamente parte iniziale di un codice fiscale di un cittadino italiano?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-1**

Quesito 9

In figura è riportato una porzione del grafico, nel piano cartesiano xOy , di una funzione reale f definita su tutto l'insieme dei reali.



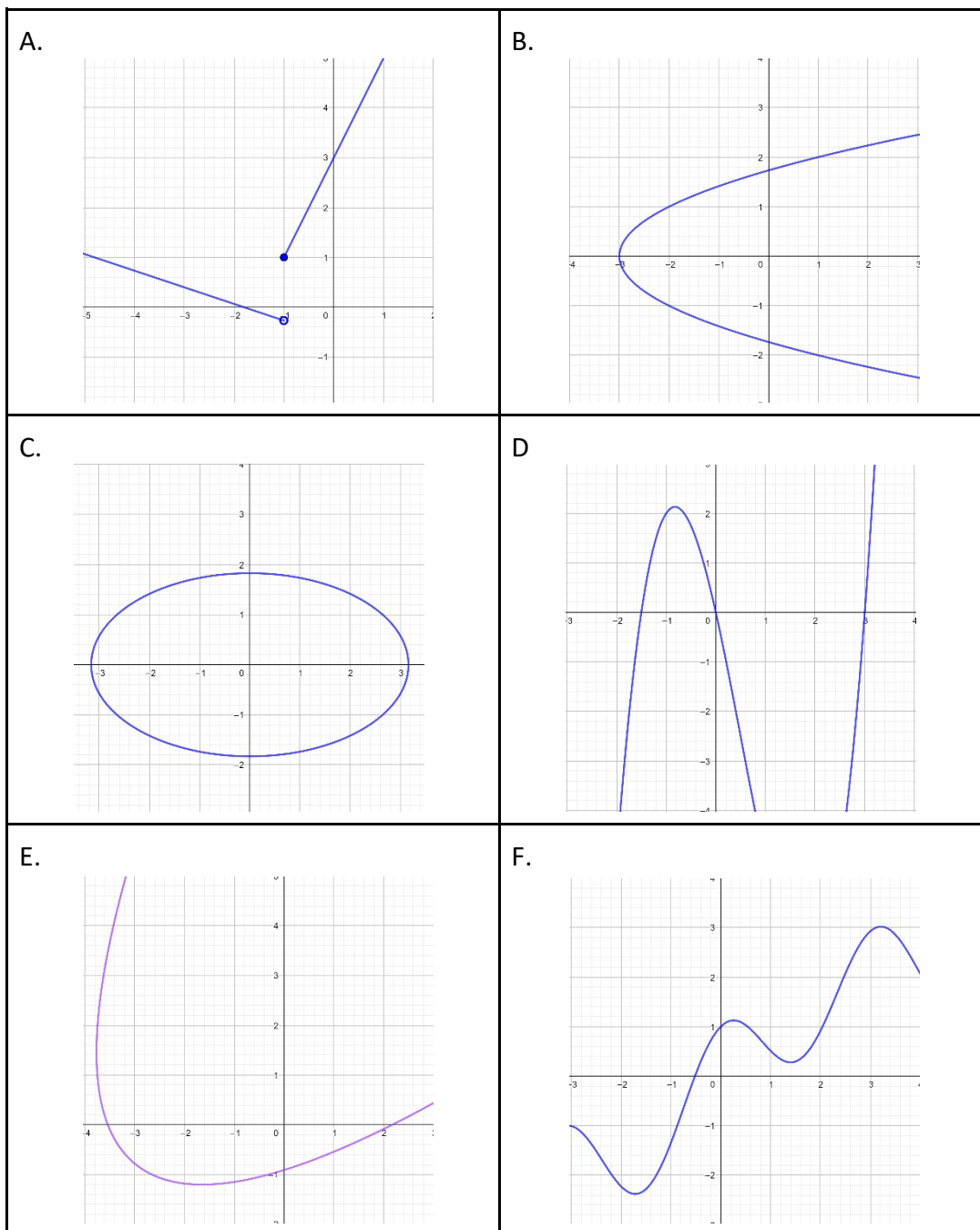
1. Per quali valori di k l'equazione $f(x) = k$ ha almeno una soluzione nell'intervallo $[-5, 1]$?
2. Per quanti valori di k l'equazione $f(x) = k$ ha esattamente tre soluzioni nell'intervallo $[-5, 1]$?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-8**

Quesito 10

Quale/i degli insiemi di punti del piano cartesiano xOy rappresentati nelle figure sottostanti può essere interpretato come parte del grafico di una funzione reale a variabile reale con variabile indipendente x ?



Risposta esatta

Abilità principali: **RF-1, RF-4**

Quesito 11

Se f è la funzione definita sui numeri reali da $f(x) = x^2$ e h è un numero reale, allora

$f(x + h) - f(x)$ è uguale a:

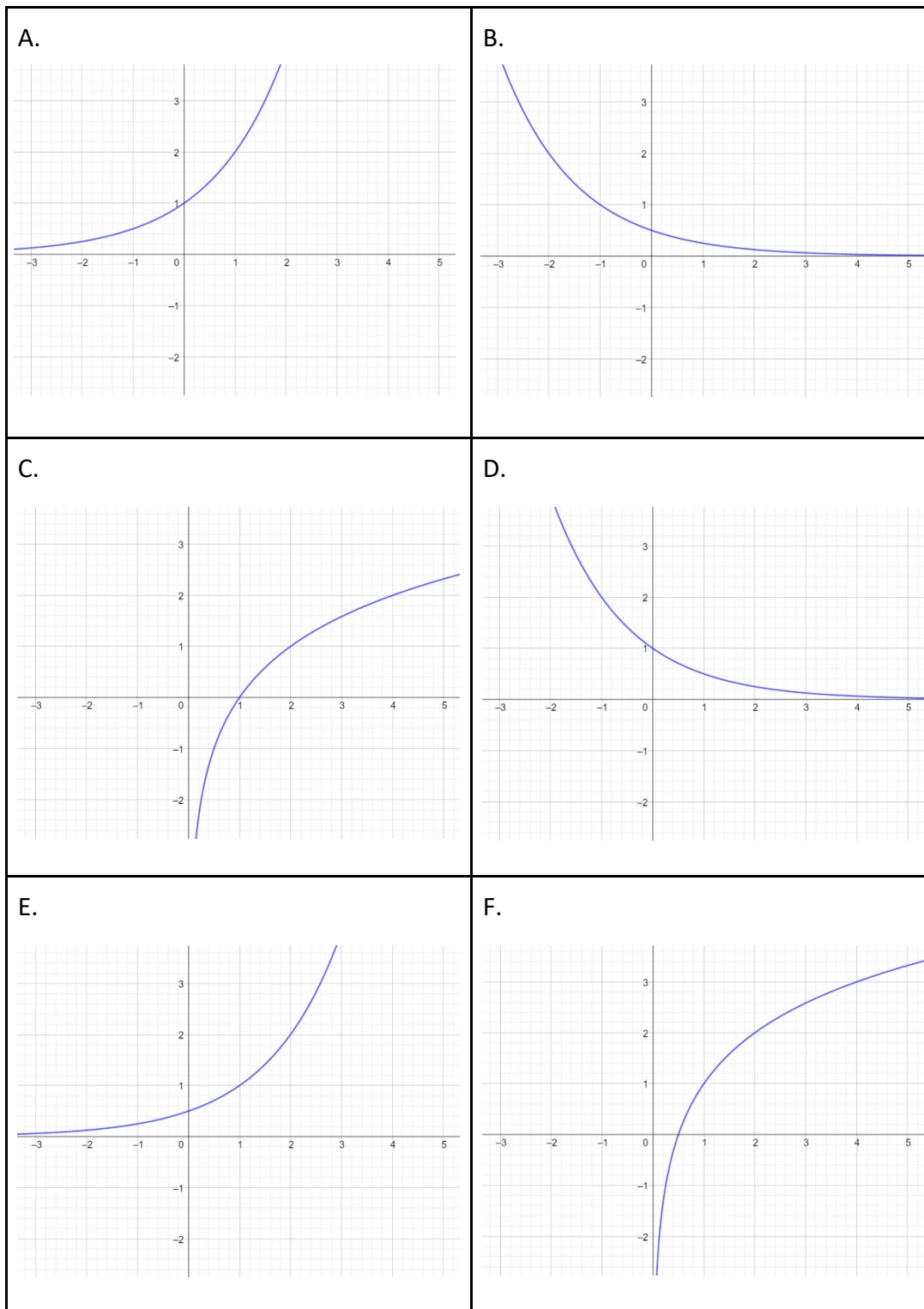
- A.** $(x + h)^2 - x^2$
- B.** $x^2 + h - x^2$
- C.** $x^2 + h^2 - x^2$
- D.** $x^2(x + h) - x^2$

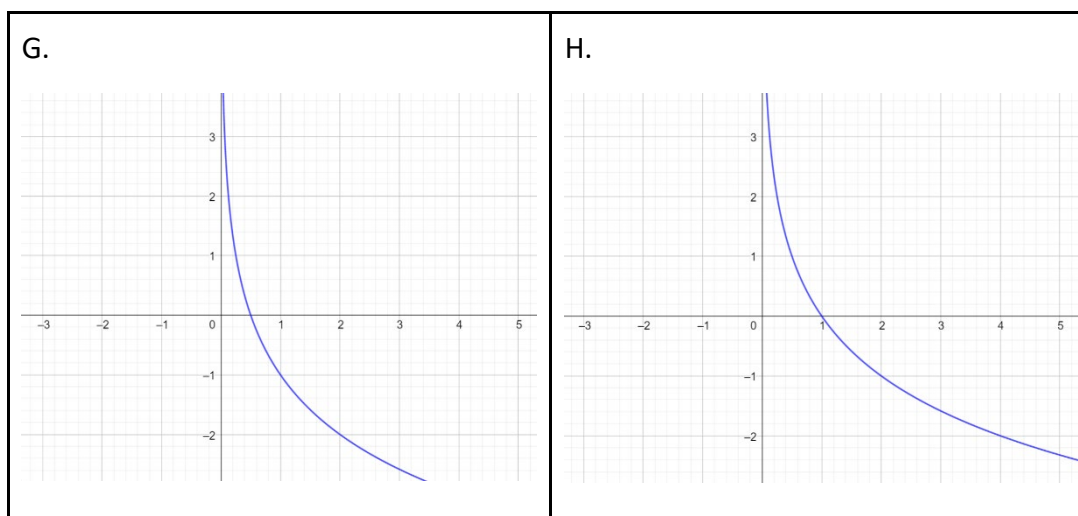
[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-1, E-2**

Quesito 12

Uno dei seguenti grafici rappresenta la funzione esponenziale di base $\frac{1}{2}$, quale?



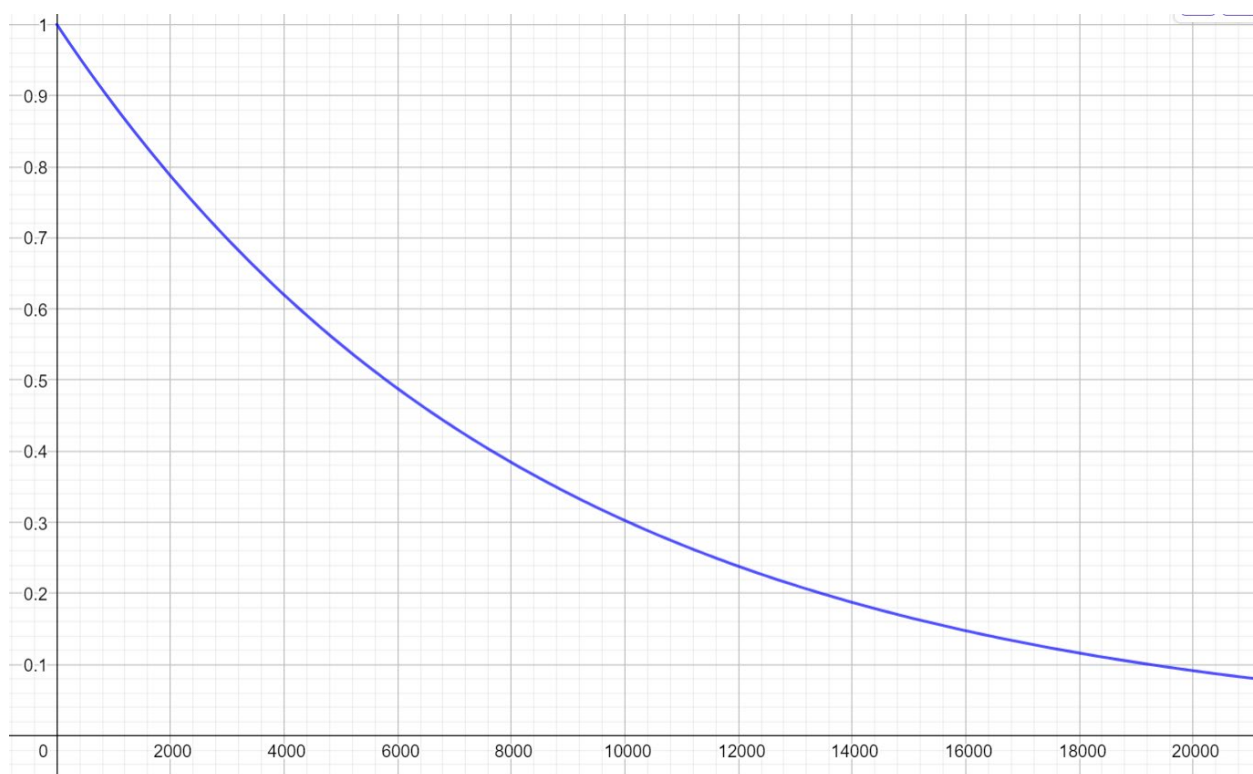


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-11**

Quesito 13

Il decadimento radioattivo è il fenomeno per cui i nuclei instabili di alcuni atomi si trasformano spontaneamente in altri, emettendo particelle. Il numero di tali atomi, quindi, diminuisce e la variazione in un certo intervallo di tempo è proporzionale al numero di atomi inizialmente presenti; la costante di proporzionalità è una caratteristica dell'elemento specifico considerato e può variare molto da elemento a elemento. Il grafico rappresenta il decadimento radioattivo del Carbonio-14, cioè la percentuale di atomi rispetto al loro numero iniziale, in funzione del tempo (espresso in anni).



- Qual è, all'incirca, il tempo di dimezzamento del carbonio-14, cioè dopo quanti anni rispetto all'istante iniziale il numero di atomi è dimezzato?
- Dopo quanti anni, all'incirca, il numero di atomi è ridotto al 10% rispetto al numero iniziale?

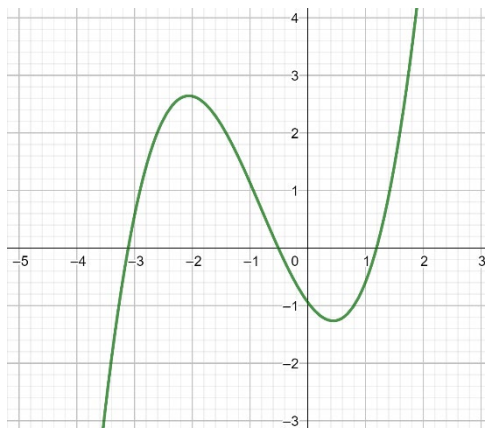
Rappresentare rispetto allo stesso sistema di riferimento il grafico del decadimento radioattivo del radio-226, sapendo che il suo tempo di dimezzamento è di circa 1600 anni.

[Risposta esatta](#)

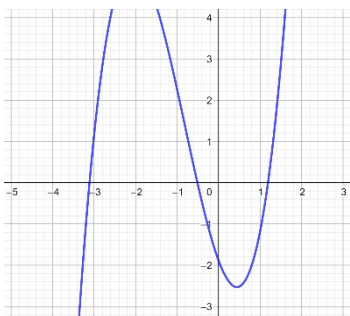
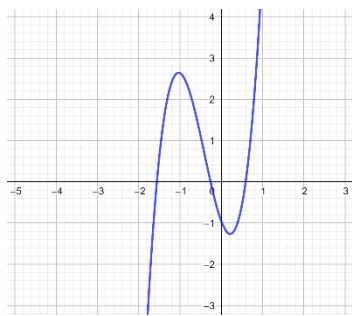
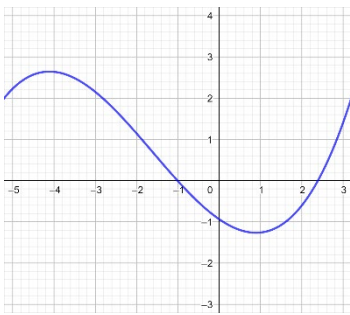
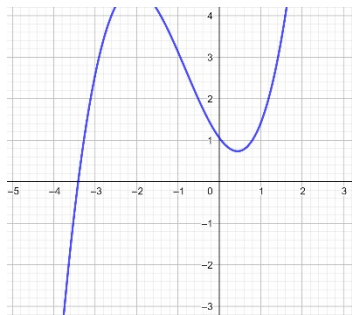
Abilità principali: **RF-11**, **RF-3**

Quesito 14

La figura rappresenta il grafico di una funzione f reale di una variabile reale.



Uno solo dei grafici che seguono rappresenta il grafico della funzione definita da $g(x) = 2f(x)$; quale?

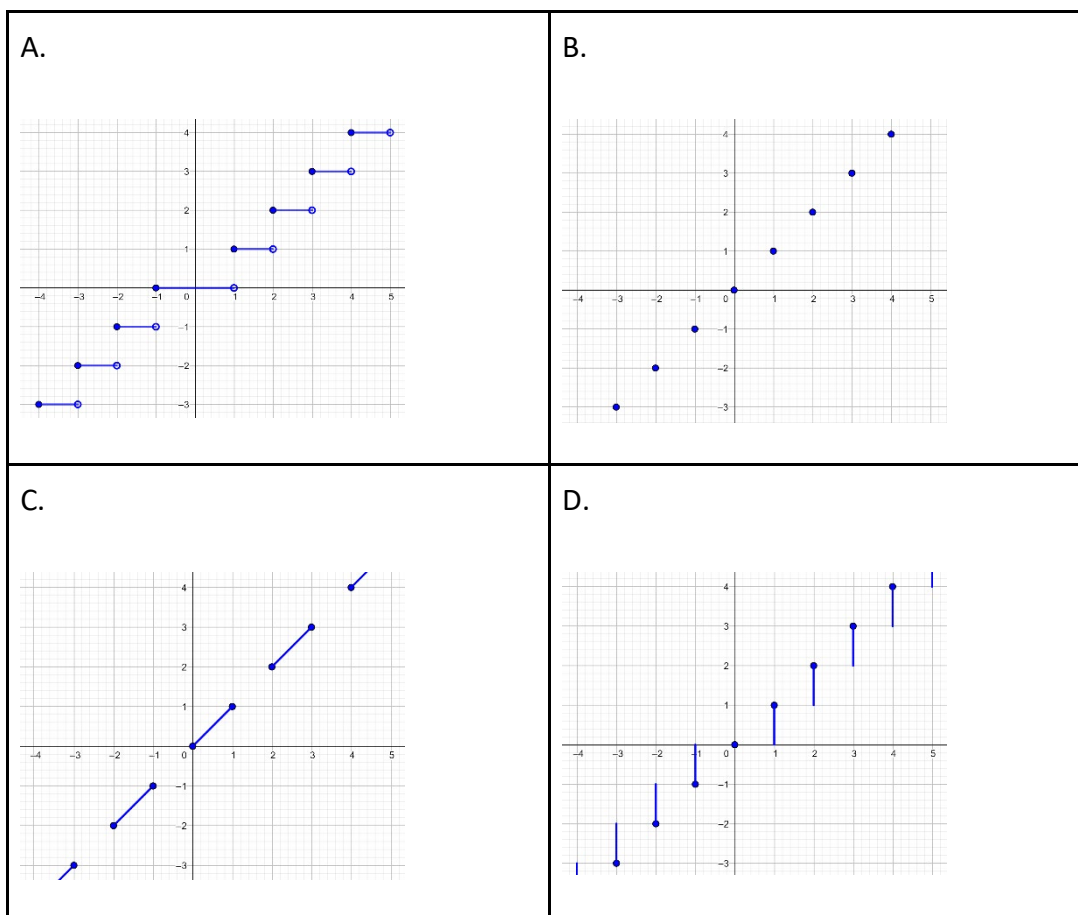
A. 	B. 
C. 	D. 

Risposta esatta

Abilità principali: **RF-7**

Quesito 15

Quale/i delle seguenti figure rappresenta/no il grafico di una funzione che assume solo valori interi?

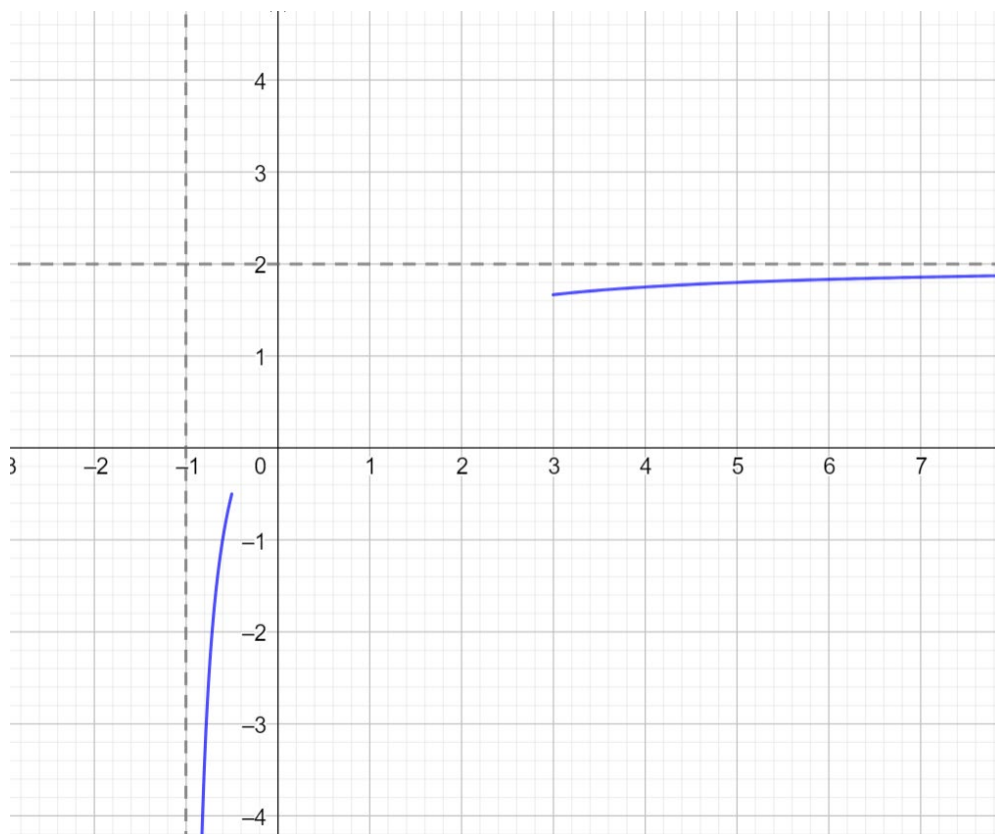


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-5, RF-3**

Quesito 16

Completa la figura in modo che rappresenti il grafico di una funzione definita sull'insieme dei numeri maggiori di -1 e che abbia un massimo assoluto per $x = 1$.

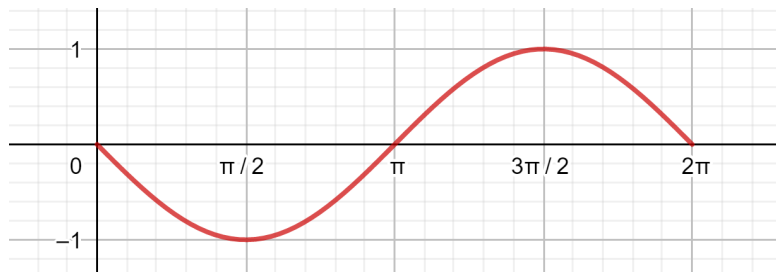


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-5, RF-6**

Quesito 17

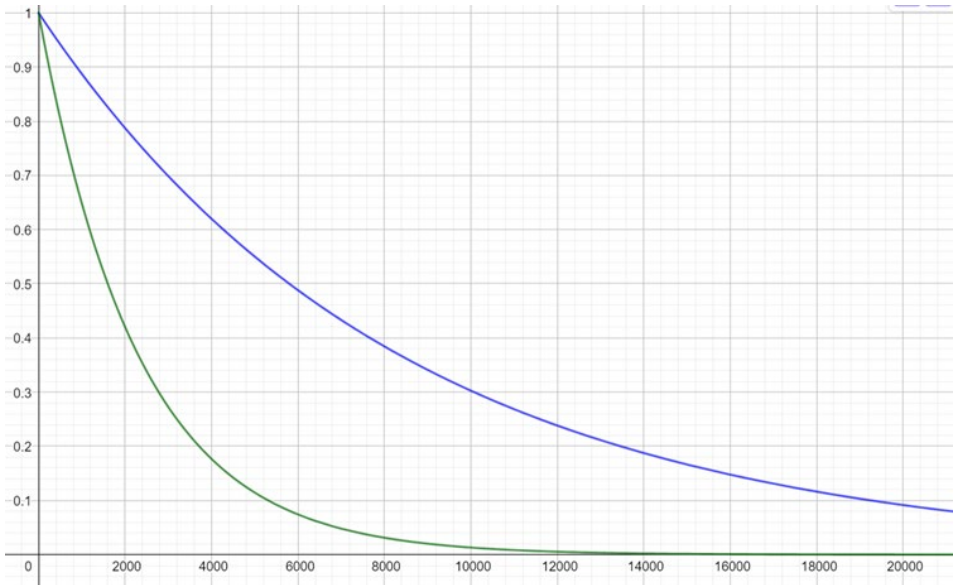
Il grafico seguente rappresenta la funzione $f(x) = \cos(x + a)$, con $a \in [0, 2\pi]$, quanto vale a ?

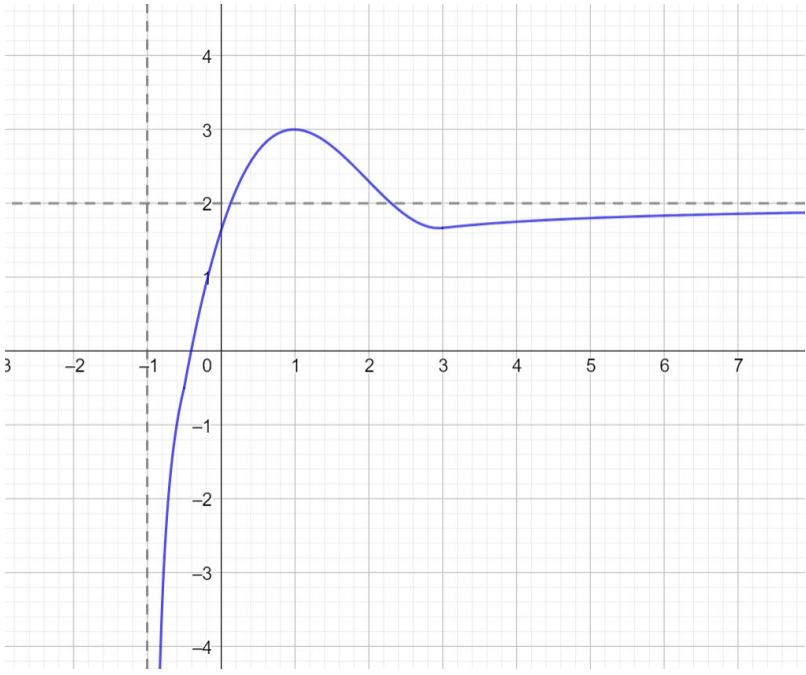


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **RF-7, RF-12**

Risposte esatte

Quesito	Risposta esatta
Quesito 1	A
Quesito 2	C e C
Quesito 3	D
Quesito 4	C
Quesito 5	C
Quesito 6	A, C e D
Quesito 7	A e C
Quesito 8	No; sì; no; no
Quesito 9	$k \in [-2, 3]$; due
Quesito 10	A, D e F
Quesito 11	A
Quesito 12	D
Quesito 13	Circa 5800 anni; circa 19000 anni; 
Quesito 14	A
Quesito 15	A e B

Quesito 16	
Quesito 17	$\frac{\pi}{2}$