

NUCLEO TRASVERSALE 2: **ARGOMENTARE**

1. Descrizione	1
2. Esempi di quesiti	3

1. DESCRIZIONE

INTRODUZIONE

È di fondamentale importanza che tu sappia seguire e costruire argomentazioni matematiche a sostegno di una tesi, della plausibilità di una scelta, della ragionevolezza di un risultato... che tu sappia riconoscere chiaramente assunti e conclusioni di un'argomentazione, concatenare in maniera coerente diversi argomenti anche al fine di produrre congetture, e utilizzare opportunamente, a seconda delle situazioni, esempi e controesempi.

ABILITÀ

- T-A-1 Comprendere un'argomentazione, distinguendo assunti e conclusioni, cogliendone la struttura e identificando i diversi passi di ragionamento e il legame tra loro.
Riconoscere se la conclusione segue necessariamente dagli assunti oppure se è solo plausibile. Riconoscere il ruolo di esempi e controesempi in un'argomentazione.
- T-A-2 Costruire argomentazioni, chiarendo assunti e conclusioni, concatenando in maniera coerente diversi argomenti e utilizzando eventualmente esempi e controesempi, per sostenere e motivare affermazioni e per produrre congetture.
- T-A-3 Riconoscere una dimostrazione, condotta in riferimento a una teoria matematica, e distinguerla da altre forme di argomentazione. Conoscere il possibile status teorico di un enunciato all'interno di una teoria matematica: assioma, definizione, teorema, congettura.

T-A-4 Riconoscere l'esigenza di giustificare adeguatamente, secondo la situazione, le proprie affermazioni.

2. ESEMPI DI QUESITI

Quesito 1

Quale delle argomentazioni che seguono costituisce la giustificazione più generale dell'enunciato "la somma di 3 numeri consecutivi è un multiplo di 3"?

- A.** Prendiamo ad esempio 36, che è multiplo di 3; 36 è uguale a $11+12+13$, e quindi è uguale alla somma di 3 numeri consecutivi; se prendiamo un altro multiplo di 3, ad esempio 54, vediamo che è uguale a $17+18+19$. Lo stesso vale per tutti i multipli di 3.
- A.** Prendiamo un multiplo di 3, ad esempio 36, e dividiamolo per 3; prendiamo il risultato, nel nostro esempio 12, e poi il numero subito prima e quello subito dopo, nel nostro caso $12-1=11$ e $12+1=13$. Se sommiamo questi 3 numeri otteniamo come risultato proprio il numero di partenza, cioè 36 nel nostro esempio.
- B.** Prendiamo ad esempio 3 numeri consecutivi, 17, 18 e 19. La loro somma $17+18+19$ è uguale a 54 che è un multiplo di 3; se prendiamo altri 3 numeri consecutivi, 11, 12 e 13, e li sommiamo, la loro somma, 36, è ancora un multiplo di 3. Lo stesso vale per la somma di 3 qualunque numeri consecutivi.
- C.** Prendiamo tre numeri consecutivi, ad esempio 17, 18 e 19. Il numero più piccolo dei tre è uguale al numero centrale meno 1, nel nostro esempio $17=18-1$, e il numero più grande è uguale al numero centrale più 1, nel nostro esempio $19=18+1$; quando li sommiamo è come se sommassimo 3 volte il numero centrale, $17+18+19=(18-1)+18+(18+1)=18+18+18$, e quindi il risultato è sicuramente un multiplo di 3.

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **T-A-1**

Quesito 2

Consideriamo l'enunciato:

“L'unico divisore in comune tra due numeri interi positivi consecutivi è 1.”

Nell'elenco qui sotto sono riportate in ordine casuale le parti che compongono una dimostrazione di questo enunciato. Ricostruisci la dimostrazione originaria riordinando queste parti.

- 1.** Poiché 1 è uguale al prodotto tra d e un numero intero $(k - h)$, il numero 1 è un multiplo di d . In altre parole d è un divisore di 1.
- 2.** La differenza tra i due numeri è quindi $k \cdot d - h \cdot d$, che può essere riscritta come $(k - h) \cdot d$, e perciò $(k - h) \cdot d$ è uguale a 1.
- 3.** Consideriamo due numeri interi consecutivi e indichiamo con a e b rispettivamente il maggiore e il minore dei due. Abbiamo allora che $a - b = 1$.
- 4.** Siccome l'unico divisore positivo di 1 è 1, d è uguale a 1. Perciò l'unico divisore positivo in comune tra due numeri interi consecutivi è 1.
- 5.** Supponiamo che il numero d sia un divisore comune tra i due numeri, possiamo scrivere a e b rispettivamente come $k \cdot d$ e $h \cdot d$, con k e h numeri interi.

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **T-A-1**

Quesito 3

Consideriamo l'enunciato:

“Sia ABC un triangolo rettangolo con angolo retto in A. Indichiamo con M il punto medio dell'ipotenusa BC. Allora la lunghezza del segmento AM è uguale a quella del segmento BM”

Quella che segue è una sua giustificazione:

1. Tracciamo per il punto B una retta parallela ad AC e per il punto C una retta parallela ad AB, chiamiamo D il punto di intersezione delle due rette.
2. Il quadrilatero ABDC è un parallelogramma con un angolo retto.
3. Dunque ABDC è un rettangolo.
4. BC è una diagonale di questo rettangolo, ed M ne è il punto medio.
5. Tracciamo ora la diagonale AD. Siccome le diagonali di un rettangolo sono uguali e si incontrano nel loro punto medio, AD è uguale a BC e M è il punto medio anche di AD.
6. Quindi AM è uguale a metà di AD, e quindi a metà di BC.
7. Cioè la lunghezza del segmento AM è uguale a quella del segmento BM.

Rispondi ora a queste domande:

1. Dove si usa in questa giustificazione l'ipotesi che il triangolo ABC è rettangolo?
2. Dove si usa in questa giustificazione l'ipotesi che M sia il punto medio di BC?
3. Perché AM è uguale a metà di AD?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **T-A-1, T-A-2, T-A-3**

Quesito 4

Considera l'enunciato:

“Se a , b e c sono numeri interi dispari, allora l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni intere”.

Quello che segue è un tentativo di giustificazione in cui sono presenti alcuni errori. Tuttavia, l'idea generale alla base di questo tentativo è una buona idea. Trova gli errori e correggili in modo da trasformare questo tentativo in una giustificazione corretta.

Se n è un numero intero e lo sostituiamo a x nell'espressione al primo membro dell'equazione otteniamo $an^2 + bn + c$ che è sempre un numero dispari. Infatti, c è dispari, e an^2 e bn sono dispari in quanto multipli di due numeri dispari, rispettivamente a e b . Quindi $an^2 + bn + c$ è un numero dispari qualunque sia n , intero, e per questo non può essere uguale a 0. Quindi, nessun numero intero può essere soluzione dell'equazione.

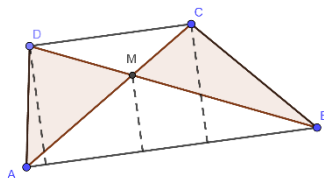
Risposta esatta

Abilità principali: **T-A-1, T-A-2, T-A-3**

Quesito 5

Considera l'enunciato:

“Se ABCD è un trapezio, e M è il punto di incontro delle sue diagonali, i triangoli BCM e ADM hanno area uguale”.



L'enunciato è corretto. Quello che segue è un tentativo di giustificazione in cui sono presenti alcuni errori. Tuttavia, l'idea generale alla base di questo tentativo è una buona idea. Trova gli errori e correggili in modo da trasformare questo tentativo in una giustificazione corretta.

Indichiamo con h l'altezza del trapezio. Questa è anche l'altezza dei triangoli ABC e ABD , quindi i due triangoli hanno la stessa area $\frac{1}{2}h \cdot AB$.

Ora, l'area del triangolo AMB è metà di quella dei triangoli BCM e ADM . Infatti, la sua altezza è $\frac{1}{2}h$ e quindi la sua area è $\frac{1}{4}h \cdot AB$. Quindi i triangoli BCM e ADM hanno entrambi area

$$\frac{1}{2}h \cdot AB - \frac{1}{4}h \cdot AB = \frac{1}{4}h \cdot AB.$$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **T-A-1, T-A-2, T-A-3**

Quesito 6

Giustificare gli enunciati che seguono:

- La somma delle misure in radianti degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è $\pi \cdot (n - 2)$.
- La somma di 4 numeri interi consecutivi è pari
- Se la somma di 3 interi consecutivi è pari, allora il minore dei 3 è dispari.

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **T-A-2**

Quesito 7

- Fai esempi di quaterne di numeri interi tutti maggiori di 1 e diversi tra loro (a, b, c, d) tali che $ab = cd$.
- Siano a, b, c, d quattro numeri interi tutti maggiori di 1 e diversi tra loro tali che $ab = cd$. Considera le seguenti affermazioni e per ognuna di esse stabilisci se è vera o falsa, argomentando la tua scelta:
 1. “Nessuno dei quattro numeri è primo”.
 2. “Almeno uno dei quattro numeri è pari”.
 3. “Almeno uno dei quattro numeri è primo”.
 4. “I numeri a e b non possono essere entrambi primi”.
 5. “Tra i numeri a e b almeno uno deve essere primo”.

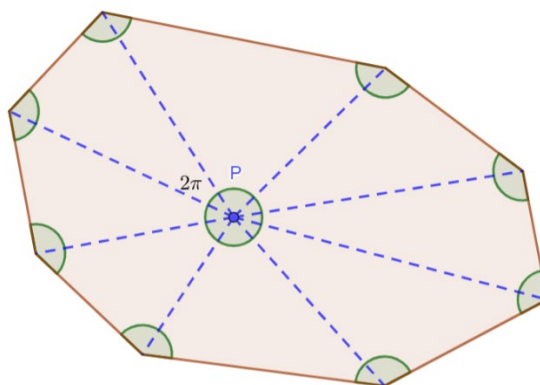
[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **T-A-2, T-A-3**

Risposte esatte

Quesito	Risposta esatta
Quesito 1	D Infatti, A e B riguardano l'enunciato inverso, cioè che un multiplo di 3 si può scrivere come somma di tre numeri interi consecutivi. C mostra che l'enunciato in questione è valido su due esempi specifici, la terna 11, 12 e 13 e la terna 17, 18 e 19. Ma si limita a fare i calcoli per questi due esempi senza presentare nessun ragionamento generale che possa valere per ogni terna. D mostra che l'enunciato è valido analizzando un esempio specifico (la terna 17, 18 e 19) ma in un modo del tutto generale, che prescinde dall'esempio considerato. Si può riconoscere che è possibile ripetere il ragionamento svolto in D in maniera identica per ogni terna di numeri consecutivi e che si può concludere che la somma di 3 numeri consecutivi è un multiplo di 3 per le stesse identiche ragioni, senza alcun bisogno di verificarlo effettivamente.
Quesito 2	3, 5, 2, 1, 4
Quesito 3	Nel punto 2 per poter asserire che il parallelogramma ABDC ha un angolo retto. Nel punto 5 per poter asserire che M è il punto medio di AD e nel punto 6 per poter asserire che AM è uguale a metà di BC. Perché, dato che AD e BC sono le diagonali del rettangolo ABDC, esse hanno lo stesso punto medio e, dato che M è il punto medio di BC, esso è anche il punto medio di AD.
Quesito 4	L'errore consiste nell'affermare che an^2 e bn sono sicuramente dispari, perché multipli di un numero dispari. Ad esempio, 6 è multiplo di un numero dispari (3), ma è pari. Una giustificazione corretta è la seguente.

	Se n è un numero intero e lo sostituiamo a x nell'espressione al primo membro dell'equazione otteniamo $an^2 + bn + c$ che è sempre un numero dispari. Distinguiamo due casi. Se n è pari, allora an^2 e bn sono pari in quanto multipli del numero pari n. Perciò $an^2 + bn + c$ è un numero dispari in quanto somma di due numeri pari, an^2 e bn, e uno dispari, c. Se n è dispari, allora anche n^2, il suo quadrato, è dispari. Quindi an^2 e bn sono dispari in quanto ottenuti entrambi moltiplicando tra loro due numeri dispari. Perciò $an^2 + bn + c$ è un numero dispari in quanto somma di tre numeri dispari: an^2, bn e c. Abbiamo dimostrato che $an^2 + bn + c$ è un numero dispari qualunque sia n, intero, e per questo motivo non può essere uguale a 0. Quindi, nessun numero intero è soluzione dell'equazione data.
Quesito 5	L'errore consiste nell'affermare che l'altezza del triangolo AMB è $\frac{1}{2}h$. Una giustificazione corretta è la seguente. Indichiamo con h l'altezza del trapezio. Questa è anche l'altezza dei triangoli ABC e ABD rispetto alla base AB, quindi i due triangoli hanno la stessa area $\frac{1}{2}h \cdot AB$. L'area del triangolo ABC è uguale alla somma delle aree dei triangoli AMB e BCM, mentre quella del triangolo ABD è uguale alla somma delle aree dei triangoli AMB e ADM. Quindi sia l'area del triangolo BCM sia quella del triangolo ADM si ottengono sottraendo a $\frac{1}{2}h \cdot AB$ l'area del triangolo AMB. I triangoli BCM e ADM hanno perciò la stessa area.
Quesito 6	Proponiamo 3 possibili dimostrazioni, una per ciascun enunciato. A seconda del contesto e degli obiettivi si possono produrre diverse forme di giustificazione dei tre enunciati. Consideriamo un punto P interno al poligono e congiungiamolo a ciascuno dei vertici del poligono.



Poiché il poligono è convesso, il poligono viene diviso in n triangoli. La somma delle ampiezze in radianti degli angoli interni del poligono è quindi uguale alla differenza tra la somma delle ampiezze in radianti degli angoli interni degli n triangoli e 2π , l'ampiezza in radianti dell'angolo giro formato dagli angoli dei triangoli che hanno vertice in P . Poiché ogni triangolo ha la somma delle ampiezze in radianti dei suoi angoli interni uguale a π , concludiamo che la somma delle ampiezze in radianti degli angoli interni del poligono è uguale a $n\pi - 2\pi = \pi \cdot (n - 2)$.

Consideriamo quattro numeri interi consecutivi qualsiasi e indichiamoli con n , $n+1$, $n+2$ e $n+3$, dove n rappresenta il minore dei quattro. La loro somma è uguale a $4n+6$. Qualunque sia il numero intero n , $4n$ è un multiplo di 4 e quindi è un numero pari; dato che anche 6 è pari e che la somma di due numeri pari è pari, allora anche $4n + 6$ è un numero pari. Dunque, la somma di quattro numeri interi consecutivi qualunque è pari.

In 3 numeri interi consecutivi ci sono 2 numeri pari, il minore e il maggiore dei 3, e 1 numero dispari, compreso tra i 2 numeri pari, oppure 1 numero pari e 2 numeri dispari. Nel primo caso la somma dei 3 numeri è dispari, mentre nel secondo caso è pari. Se questa somma è dispari, allora siamo nel primo caso e il minore dei 3 numeri è quindi dispari.

Quesito 7

$2 \cdot 15 = 5 \cdot 6$, $10 \cdot 18 = 20 \cdot 9$;
 falso, vedi esempio $6 \cdot 4 = 2 \cdot 12$;
 falso, vedi esempio $15 \cdot 7 = 3 \cdot 35$;
 falso, vedi esempio $6 \cdot 8 = 4 \cdot 12$;

Vero. Dato che vale l'uguaglianza $ab=cd$, i numeri c e d sono entrambi divisori del prodotto ab . Se i numeri a e b fossero entrambi primi, allora gli unici divisori del prodotto ab sarebbero: 1, a , b e ab ; quindi, dovrebbe verificarsi uno dei seguenti quattro casi $c=1$ e $d=ab$, $c=a$ e $d=b$, $c=b$ e $d=a$, $c=ab$ e $d=1$. Questo però sarebbe in contraddizione con l'ipotesi che i

	numeri a, b, c e d siano tutti diversi tra loro e tutti maggiori di 1. Dunque, sotto le ipotesi date, se l'uguaglianza $ab=cd$ è vera, allora a e b non possono essere entrambi numeri primi (e non possono essere entrambi primi nemmeno c e d). falso, vedi $6 \cdot 4 = 2 \cdot 12$.
--	---