

NUCLEO TEMATICO 1:

LOGICA, RAGIONAMENTO E LINGUAGGIO NATURALE

1. Premessa	1
2. Descrizione delle conoscenze e competenze relative a <i>logica, linguaggio e ragionamento</i> che sono utili all'inizio degli studi universitari	2
3. Una sequenza graduale di esempi per comprendere la preparazione a cui mirare	3

1. PREMESSA

Nella vita quotidiana, nel lavoro, nello studio, nella ricerca scientifica, ci si trova in ogni momento a chiedersi se una certa affermazione sia vera oppure no. In certi casi la risposta si può ottenere con una verifica dei fatti o mediante un'osservazione sperimentale, in altri casi questo non si può fare e si deve cercare di dedurre la risposta con un ragionamento, a partire dalla conoscenza già nota che altre affermazioni sono vere o false. Tali ragionamenti sono utili per costruire e modificare la nostra conoscenza delle cose e possono essere importanti a fini assai concreti: possono aiutarci a comprendere la situazione in cui ci troviamo e perché certi eventi si sono verificati; possono dirci cosa è accaduto in passato, studiando il presente; possono aiutarci a prevedere cosa accadrà in futuro; possono darci motivi per prendere decisioni sui comportamenti che è opportuno tenere individualmente e come collettività, se si vuole arrivare a determinati obiettivi.

In ogni corso di laurea gli studenti devono confrontarsi con i ragionamenti proposti dai docenti e dai testi, in base ai quali si conclude che, in certe condizioni, certi enunciati sono veri o falsi. Gli studenti devono saper valutare la correttezza di tali ragionamenti, devono saperli discutere con i compagni e con i docenti e devono imparare a produrne di propri. Per fare tutto ciò, gli studenti utilizzeranno il linguaggio naturale integrato con l'uso di simboli, formule e rappresentazioni grafiche. La capacità di ragionamento degli studenti, insieme alla capacità di usare a questo fine la lingua naturale e i linguaggi simbolici e grafici specifici di ogni disciplina, crescerà gradualmente nel

percorso di studio universitario, ma dovrà essere presente in misura opportuna già all'ingresso del corso di laurea.

Il presente Quadro di riferimento indica che tipo di preparazione, nell'ambito suddetto, è importante che gli studenti abbiano all'ingresso dell'università. Di conseguenza il Quadro di riferimento potrà essere utile al fine di progettare materiali e percorsi di lavoro che gli studenti useranno per autovalutare e consolidare tale preparazione, nonché al fine di costruire strumenti di verifica a disposizione dei docenti e degli atenei. Le conoscenze e competenze saranno descritte sinteticamente nella sezione 2 e verranno precisate nella sezione 3 tramite molti esempi. La maggior parte degli esempi saranno scelti in modo che siano minime o nulle le conoscenze disciplinari specifiche necessarie alla loro comprensione.

2. DESCRIZIONE DELLE CONOSCENZE E COMPETENZE RELATIVE A LOGICA, LINGUAGGIO E RAGIONAMENTO CHE SONO UTILI ALL'INIZIO DEGLI STUDI UNIVERSITARI

- Riconoscere se una frase del linguaggio o un'espressione simbolica o grafica, in un determinato contesto, è un enunciato; riconoscere quali elementi del contesto sono determinanti affinché la frase sia un enunciato oppure no.
- Riconoscere enunciati aperti (cioè frasi che contengono variabili e che diventano enunciati quando si assegnano valori a tali variabili) e riconoscere in quali insiemi le variabili possono prendere i loro valori.
- Riconoscere e utilizzare schemi di ragionamento che permettono di stabilire il valore di verità di un enunciato a partire dal valore di verità, che già si conosce, di altri enunciati.

- Riconoscere se un enunciato è ottenuto da altri enunciati mediante i connettivi logici:

e	che si scrive anche	AND	oppure	$\wedge$
o	che si scrive anche	OR	oppure	$\vee$
se... allora	che si scrive anche	IF... THEN	oppure	$\Rightarrow$
se e solo se	che si scrive anche	IFF	oppure	$\Leftrightarrow$
non	che si scrive anche	NOT	oppure	$\neg$

- Trasformare un enunciato in un altro che è equivalente, ma più semplice da usare a seconda delle situazioni e dell'obiettivo che si ha.

- Comprendere e usare espressioni come:

tutti ogni nessuno almeno uno qualche

e saperle esprimere con i simboli:

$\forall$ (*per ogni*), $\exists$ (*esiste [almeno] un*)

- Usare correttamente le espressioni:
 - condizione necessaria,
 - condizione sufficiente,
 - condizione necessaria e sufficiente.
- Riconoscere e utilizzare lo schema della “dimostrazione per assurdo”.
- Riconoscere se un ragionamento deduttivo è corretto.
- Individuare la possibile ambiguità o vaghezza di una frase; trovare formulazioni precise di frasi ambigue o vaghe.

3. UNA SEQUENZA GRADUALE DI ESEMPI PER COMPRENDERE LA PREPARAZIONE A CUI MIRARE

Vedremo ora una sequenza di esempi di situazioni, enunciati, quesiti che lo studente può incontrare all’inizio degli studi universitari e che deve essere in grado di affrontare, ragionando. Non abbiamo l’obiettivo di costruire una teoria formale del ragionamento deduttivo e della logica, ma desideriamo soltanto indicare un modo di pensare e un linguaggio che aiutano ad analizzare e comprendere i ragionamenti deduttivi, espressi nel linguaggio naturale e con l’ausilio di linguaggi simbolici e grafici. Svilupperemo gli esempi in modo graduale e organico, collegandoli tra loro. Cominceremo a parlare di situazioni molto semplici e proseguiremo con situazioni via via più complesse, utilizzando i termini e le costruzioni linguistiche necessarie e contando sul fatto che i concetti, i significati e le “regole” saranno compresi e gradualmente chiariti sempre meglio grazie all’uso che se ne fa. Daremo comunque qualche “sistemazione” a posteriori dei concetti introdotti e delle competenze indicate, esplicitando qualche “definizione”, qualche notazione e qualche “fatto”, che man mano considereremo acquisito sulla base degli esempi presentati, senza sentirci in obbligo di dimostrarlo. In questo modo ci auguriamo che dal discorso emerga l’indicazione di un quadro complessivo e sia possibile comprendere quale sia la preparazione a cui si vuole arrivare.

Nello sviluppo di questo programma diamo per scontata una conoscenza standard della lingua italiana e dei termini e concetti di uso più comune fra quelli previsti per l’obbligo scolastico a sedici

anni. In particolare, usiamo i concetti e i simboli della matematica elementare che si apprende nella scuola secondaria di primo grado.

Prima di iniziare osserviamo esplicitamente che l'ordine in cui i concetti e le competenze saranno introdotti attraverso gli esempi non sarà necessariamente identico a quello in cui si trovano elencati nella sezione 2.

ENUNCIATI, CONTESTI, ESPRESSIONI, VARIABILI.

La frase *«il mese di febbraio dell'anno 2021 ha 28 giorni»* è un enunciato.

L'enunciato è vero; ciò equivale a dire che il valore di verità dell'enunciato è 'VERO'.

La frase *«il mese di gennaio ha 32 giorni»* è un enunciato.

L'enunciato è falso; ciò equivale a dire che il valore di verità dell'enunciato è 'FALSO'.

La frase *«il mese di febbraio ha 28 giorni»*, se si intende col significato «in ogni anno il mese di febbraio ha 28 giorni», è un enunciato falso, poiché negli anni bisestili febbraio ha 29 giorni. Se invece si intende che la frase non precisi di che anno, o anni, si parla, allora essa non è un enunciato, poiché non ha senso dire se è vera o falsa. Si noti che la frase *«il mese di gennaio ha 32 giorni»*, considerata nel punto precedente, non presenta invece problemi di interpretazione, poiché l'affermazione è falsa in qualunque caso.

Di un enunciato deve aver senso dire che è vero oppure che è falso; inoltre, un enunciato non può essere sia vero, sia falso.

Osserviamo che ci sono enunciati per i quali, almeno con le attuali conoscenze, è praticamente impossibile stabilire se sono veri o falsi, anche se certamente vale uno e uno solo dei due casi. Ad esempio:

Ludwig van Beethoven è nato il 16 dicembre 1770.

Si sa che Beethoven è stato battezzato il 17 dicembre, ma non si sa in che giorno è nato e non si può prevedere se mai lo si saprà. La frase è comunque un enunciato.

Nella rappresentazione decimale del numero π ci sono 20 cifre consecutive uguali

L'enunciato ha un significato ben chiaro e certamente è vero o falso. Sono attualmente note molte migliaia di miliardi di cifre decimali di π e non risulta che fra queste ce ne siano 20 consecutive uguali. Ci sono delle procedure di calcolo che, con adeguati strumenti hardware, potrebbero permetterci in futuro di trovare un maggior numero di cifre e scoprire che l'enunciato è vero, ma per ora non lo sappiamo.

L'espressione $\langle 1 + 1 = 2 \rangle$ è un enunciato, espresso nel linguaggio simbolico della matematica.

L'enunciato è vero; ciò equivale a dire che il valore di verità dell'enunciato è 'VERO'.

Occorre però osservare che questo vale nel contesto usuale, in cui si usa il sistema decimale di numerazione. Se si fosse in un contesto nel quale si usa il sistema di numerazione binario, ossia in base due, nel quale esistono solamente i simboli '0' e '1', allora l'espressione sarebbe priva di senso, poiché il simbolo '2' non avrebbe significato. Nel contesto del sistema binario è vero invece l'enunciato « $1 + 1 = 10$ », che è falso nel sistema decimale.

Nel contesto della matematica elementare, l'espressione « $x + 1 = 2$ » è un enunciato ogni volta che al simbolo x si sostituisce un numero, per il quale ha senso l'operazione di somma. L'enunciato è vero se e solo se il numero che si sostituisce ad x , ossia il valore di x , è il numero 1. Si dice che il simbolo x è una variabile. L'espressione « $x + 1 = 2$ » è un enunciato aperto con una variabile, o, brevemente, un enunciato con una variabile. A seconda dei contesti, l'insieme dei valori che si possono dare alla variabile x sarà l'insieme dei numeri reali, o dei numeri interi o altro.

Il significato che si dà a una frase è determinato dal contesto in cui la frase si trova, da ciò che si ritiene sia intenzione di chi ha espresso l'enunciato e da ciò che si vuole intendere. Di conseguenza, da tutte queste cose dipendono anche il fatto che una frase sia un enunciato oppure no e il valore di verità dell'enunciato.

SCHEMI DI RAGIONAMENTO PER STABILIRE IL VALORE DI VERITÀ DI UN ENUNCIATO A PARTIRE DALLA CONOSCENZA DEL VALORE DI VERITÀ DI ALTRI ENUNCIATI.

Consideriamo le due affermazioni seguenti:

$A =$ «*se ieri Mario è passato davanti al gelataio, allora Mario ieri ha comprato il gelato*»

$B =$ «*ieri Mario è passato davanti al gelataio*»

Ciascuna di tali affermazioni è un enunciato, che può essere vero oppure falso, ma non entrambe le cose. Consideriamo poi l'ulteriore enunciato

$C =$ «*Mario ieri ha comprato il gelato*».

Vediamo qui sotto diversi schemi di ragionamento che si possono fare per concludere che uno degli enunciati suddetti è vero o falso, a seconda del valore di verità degli altri. Questi ragionamenti si dicono *deduttivi*.

SCHEMA 1

Sapendo che A e B sono veri, possiamo dedurre che C è vero.

Attenzione!

- sapendo che A è vero e B è falso, non possiamo **dedurre** che C è vero, ma C può comunque essere vero;

- sapendo che A è falso e B è vero, non possiamo **dedurre** che C è vero, ma C può comunque essere vero;
- sapendo che A è falso e B è falso, non possiamo **dedurre** che C è vero, ma C può comunque essere vero.

Invece della parola “dedurre” si può usare la parola “concludere”. Le due parole sono intercambiabili.

SCHEMA 2

Sapendo che C è falso, possiamo concludere che almeno uno dei due enunciati A, B è falso.

Infatti, se così non fosse, A e B sarebbero entrambi veri e, grazie allo schema di ragionamento 1, potremmo concludere che C è vero; ma questo non è possibile, poiché già sappiamo che C è falso.

Attenzione!

- utilizzando lo schema 2 non possiamo concludere che gli enunciati A e B sono entrambi falsi, oppure quale dei due è falso; però è evidente che:

SCHEMA 3

sapendo che C è falso e A è vero, si può dedurre che B è falso;

SCHEMA 4

sapendo **che C è falso e B è vero, si può concludere che A è falso.**

Gli schemi di ragionamento deduttivo che abbiamo esposto qui sopra sono molto comuni ed è importante saperli riconoscere quando si trovano in un discorso, nelle varie forme in cui si possono presentare. Questi schemi devono essere modi naturali di pensare e bisogna assolutamente evitare di considerarli regole da imparare a memoria. Anche per ridurre questo rischio, oltre che per la loro inutilità, abbiamo evitato di dire quali sono i nomi che vengono loro dati classicamente.

IL CONNETTIVO LOGICO “SE... ALLORA”

Nella sezione precedente abbiamo considerato l'enunciato

$A = \text{«se ieri Mario è passato davanti al gelataio, allora Mario ieri ha comprato il gelato»}.$

Questo enunciato è composto dai due enunciati

$B = \text{«ieri Mario è passato davanti al gelataio»}$

$C = \text{«Mario ieri ha comprato il gelato»}.$

mediante il connettivo logico “se... allora”. L'enunciato A visto sopra si può scrivere

$B \Rightarrow C.$

dove il simbolo “ $\Rightarrow$ ” si legge “implica”. Un enunciato di questo tipo si dice un'*implicazione*; l'enunciato da cui parte la freccia viene chiamato *antecedente dell'implicazione* e l'altro enunciato viene chiamato *conseguente*.

Con la notazione appena introdotta, gli schemi di ragionamento 1, 3 e 4 indicati nel punto precedente si possono riformulare come segue

SCHEMA 1

Sapendo che sono veri gli enunciati $B \Rightarrow C$ e B, possiamo dedurre che l'enunciato C è vero.

SCHEMA 3

Sapendo che l'enunciato $B \Rightarrow C$ è vero e che l'enunciato C è falso, possiamo dedurre che l'enunciato B è falso.

SCHEMA 4

Sapendo che l'enunciato C è falso e che l'enunciato B è vero, possiamo dedurre che l'enunciato $B \Rightarrow C$ è falso.

Lo schema di ragionamento 4 fornisce un modo per stabilire che l'implicazione $B \Rightarrow C$ è falsa, a partire dalla conoscenza dei valori di verità di B e C.

Gli schemi di ragionamento sopra indicati non forniscono invece un criterio per stabilire quando l'implicazione è vera. Conviene¹ comunque **decidere** che **l'implicazione è vera in ogni altro caso**. Raccogliamo tutti i casi nella tabella che segue:

A è vero	B è vero		$A \Rightarrow B$ è vero
A è vero	B è falso		$A \Rightarrow B$ è falso
A è falso	B è vero		$A \Rightarrow B$ è vero
A è falso	B è falso		$A \Rightarrow B$ è vero

*Questa tabella si chiama tavola di verità dell'implicazione e definisce ciò che indichiamo col nome "connettivo logico implicazione" ossia "connettivo logico **se... allora**"*

ATTENZIONE! Non tutte le frasi della lingua italiana che sono del tipo "se... allora" sono implicazioni nel senso che abbiamo definito qui sopra! In altri termini, non tutte le frasi condizionali sono implicazioni. Su questo facciamo qualche altro esempio e considerazione nella sezione 3.13.5.

CATENE DI DEDUZIONI

Lo schema di ragionamento 1 può essere ripetuto più volte, realizzando così una *catena di deduzioni*. Precisamente, sapendo che è vero l'enunciato A e sapendo inoltre che sono vere le implicazioni

$$A \Rightarrow B$$

$$B \Rightarrow C$$

si può dedurre che è vero l'enunciato C. Infatti, applicando una prima volta lo schema, si deduce che B è vero; ripetendo una seconda volta lo schema si deduce che è vero C.

Questo equivale a dire che dalla verità delle implicazioni suddette si conclude la verità dell'implicazione

$$A \Rightarrow C$$

¹ Vedremo più avanti il senso e l'utilità di questa convenzione, quando discuteremo esempi di enunciati aperti preceduti dalle parole *per ogni*.

IMPLICAZIONE INVERSA

L'implicazione $B \Rightarrow A$ si dice implicazione inversa dell'implicazione $A \Rightarrow B$. Deve essere chiaro che può accadere che un'implicazione sia vera e l'inversa sia falsa. Nel caso in cui siano vere entrambe le implicazioni $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$, questo fatto si può indicare scrivendo

$$B \Leftrightarrow A$$

dove il simbolo ' $\Leftrightarrow$ ' si legge '*se e solo se*'; in tale situazione si dice anche che gli enunciati sono *equivalenti*.

ENUNCIATI COMPOSTI CON IL CONNETTIVO LOGICO "E"

La frase:

«Il numero 4 è pari e il numero 5 è dispari»

è un enunciato, ottenuto unendo tramite la congiunzione "e" gli enunciati

«il numero 4 è pari», «il numero 5 è dispari».

L'enunciato è vero, perché entrambi gli enunciati che lo compongono sono veri. L'enunciato si può scrivere in breve $A \text{ e } B$ dove abbiamo denotato col simbolo 'A' l'enunciato *«Il numero 4 è pari»* e abbiamo denotato col simbolo 'B' l'enunciato *«il numero 5 è dispari»*.

In questa situazione la congiunzione "e" ha la funzione di *connettere* due enunciati, formando un unico enunciato composto e si dice che "e" è un *connettivo logico*. Il connettivo logico "e" si denota anche con il simbolo 'AND' oppure con il simbolo ' $\wedge$ '.

Esempio

Il numero 4 è pari e il numero 6 è dispari.

L'enunciato è falso, perché almeno uno degli enunciati che lo compongono è falso.

Esempio

Il numero 3 è pari e il numero 6 è dispari.

L'enunciato è falso, perché almeno uno degli enunciati che lo compongono è falso (in questo caso, in effetti, entrambi gli enunciati componenti sono falsi).

Dati due enunciati A, B qualsiasi, l'enunciato $A \text{ e } B$ è vero se e solo se gli enunciati A, B sono entrambi veri. Scriviamo tutti i casi che si possono presentare nella tabella che segue

A è vero	B è vero		A e B è vero
A è vero	B è falso		A e B è falso
A è falso	B è vero		A e B è falso
A è falso	B è falso		A e B è falso

La tabella qui sopra si chiama *tavola di verità* del connettivo “**e**”.

Esempio

Il numero 12 è divisibile per 3 e per 2.

Questo enunciato è equivalente a

«*Il numero 12 è divisibile per 3 **e** Il numero 12 è divisibile per 2*»

che è meno scorrevole del primo e quindi non si usa comunemente, ma ha il vantaggio di mettere in evidenza la struttura logica della frase come composizione di due enunciati tramite la congiunzione “**e**”. L’enunciato è vero.

NEGAZIONE DI UN ENUNCIATO, IL CONNETTIVO LOGICO **NON**.

Esempio

Consideriamo l'enunciato:

$A = \text{«il prodotto di 4 per 5 è uguale a 20»},$

che è vero. La sua negazione è l'enunciato:

$\text{«è falso che: il prodotto di 4 per 5 è uguale a 20»}$

che si esprime più comunemente nella forma:

$\text{«il prodotto di 4 per 5 non è uguale a 20»}$

La negazione di A si può denotare con:

non A

oppure

$\neg A$

dove si è usato il connettivo logico **non**, che si indica anche con il simbolo " $\neg$ ".

Esempio

Consideriamo l'enunciato:

$B = \text{«il prodotto di 4 per 5 è 19»},$

che è falso. La sua negazione è l'enunciato:

non B = $\text{«il prodotto di 4 per 5 non è 19»}$

che è vero.

Osserviamo che, dato un qualsiasi enunciato C, la sua negazione è vera se e solo se C è falso, ed è falsa se e solo se C è vero. Si vede che la negazione della negazione di un enunciato C è un enunciato equivalente a C, ossia:

$C = \text{non (non C)}$

La formula precedente, se al posto di C si prende l'enunciato A considerato all'inizio di questa sezione 3.5, si può scrivere:

$A = \text{è falso che: (è falso che: «il prodotto di 4 per 5 è 20»)}$

Vogliamo ora osservare un'importante relazione fra l'implicazione e la negazione, che è utile in molte situazioni:

dati due enunciati A e B qualsiasi, supponiamo di sapere che è vera l'implicazione:

$$A \Rightarrow B \quad (*)$$

allora possiamo concludere che è vera anche l'implicazione:

$$\text{non } B \Rightarrow \text{non } A \quad (**)$$

Per convincersi di tale conclusione, si può ragionare così:

se è vero l'enunciato **non** B, allora A non può essere vero; altrimenti, per l'implicazione (*) sarebbe vero anche B, e così B sarebbe sia vero sia falso, cosa che non è possibile; in conclusione, A è falso, ossia l'enunciato **non** A è vero.

Per completezza diciamo che l'implicazione **non** B $\Rightarrow$ **non** A si dice **implicazione contronominale** dell'implicazione $A \Rightarrow B$.

Facciamo un esempio.

Consideriamo gli enunciati:

A = «Stamattina pioveva quando Mario è uscito di casa»

B = «Mario ha preso l'ombrello»

dove in B è sottinteso: «quando stamattina è uscito di casa».

In questa situazione, l'implicazione $A \Rightarrow B$ si scrive per esteso così:

«se stamattina pioveva quando Mario è uscito di casa, allora Mario ha preso l'ombrello»

e si capisce che, se è vera, allora è vera anche l'altra implicazione

«se Mario non ha preso l'ombrello, allora stamattina non pioveva quando è uscito di casa»

che è proprio **non** B $\Rightarrow$ **non** A.

L'osservazione che abbiamo fatto nel riquadro sopra si può anche sintetizzare dicendo che è vero l'enunciato:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$$

che è un buon esempio di implicazione fra due implicazioni. Poiché tale enunciato è vero comunque si prendano A e B, è vero in particolare se si scrive **non** B al posto di A e si scrive **non** A al posto di B. Si ottiene così:

$$(\text{non } B \Rightarrow \text{non } A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

dove si è usato che **non non** A = A e **non non** B = B. L'insieme delle ultime due formule qui sopra si esprime dicendo che l'implicazione:

$A \Rightarrow B$ è vera **se e solo se** l'implicazione **non** B $\Rightarrow$ **non** A è vera.

In altre parole, le due implicazioni sono equivalenti. Questo si può scrivere in simboli:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A).$$

e si dice anche che ogni implicazione è equivalente alla sua implicazione contronominale.

Una frequente applicazione di quanto si è detto è che, al fine di dimostrare un'implicazione $A \Rightarrow B$, si dimostra invece l'implicazione contronominale **non** B $\Rightarrow$ **non** A, che magari è più facile.

Esempio

Consideriamo l'enunciato:

$C = \text{«il numero 122 è divisibile per 2 e per 3»}.$

che è equivalente all'enunciato: A **e** B, dove

$A = \text{«il numero 122 è divisibile per 2»}$

$B = \text{«il numero 122 è divisibile per 3»}$

L'enunciato C non è vero poiché gli enunciati A, B non sono entrambi veri (B è falso). La negazione di C è:

non C = «è falso che: A **e** B»

ossia:

«è falso che: entrambi gli enunciati A, B sono veri»

Ossia:

«è falso almeno uno degli enunciati A, B»

e in conclusione:

«è vero almeno uno degli enunciati **non** A, **non** B» (*)

Poiché B è falso, l'enunciato «**non** B» è vero e pertanto l'enunciato «**non** C» è vero.

ENUNCIATI COMPOSTI CON IL CONNETTIVO LOGICO “o”

Esempio

L'enunciato (*) dell'esempio precedente si scrive in modo equivalente:

«il numero 122 non è divisibile per 2 o il numero 122 non è divisibile per 3»

dove abbiamo scritto in grassetto e in rosso la parola “o”, che qui ha la funzione di connettivo logico. Il connettivo “o” si chiama *disgiunzione non esclusiva* e si denota anche con il simbolo ‘OR’ oppure con il simbolo ‘V’. Precisiamo qui di seguito l'uso che si fa del connettivo “o”.

Se A, B sono enunciati, l'enunciato $A \text{ o } B$ è vero se e solo se almeno uno degli enunciati A, B è vero. In altre parole, si hanno i seguenti casi

A è vero	B è vero		$A \text{ o } B$ è vero
A è vero	B è falso		$A \text{ o } B$ è vero
A è falso	B è vero		$A \text{ o } B$ è vero
A è falso	B è falso		$A \text{ o } B$ è falso

La tabella qui sopra si chiama *tavola di verità del connettivo “o”*.

Nel linguaggio comune la parola “o” viene utilizzata anche con valore di *disgiunzione esclusiva*, come si discute nella sezione ([Usi e ambiguità del linguaggio naturale ai quali occorre fare attenzione](#)).

Consideriamo l'enunciato:

$C = \text{«il numero 306 è divisibile per 3 o per 5»}$.

Questo enunciato è equivalente a:

$A \text{ o } B$

dove

$A = \text{«il numero 306 è divisibile per 3»}$

$$B = \text{«il numero 306 è divisibile per 5»}$$

L'enunciato C è vero, poiché è vero uno dei due enunciati congiunti da $\bullet$ (l'enunciato A).

La negazione di C è:

$$\text{non } C = \text{«è falso che: } A \bullet B \text{»}$$

ossia:

$$\text{«è falso che: almeno uno degli enunciati } A, B \text{ è vero»}$$

ossia:

$$\text{«sono falsi entrambi gli enunciati } A, B \text{»}$$

e in conclusione:

$$\text{non } C = \text{«sono veri entrambi gli enunciati non } A, \text{ non } B \text{»}$$

Ricordando che $C = A \bullet B$, osserviamo che abbiamo ottenuto

$$\text{non } (A \bullet B) = (\text{non } A) \text{ e } (\text{non } B)$$

Simmetricamente osserviamo che la formula (*) del punto 3.5.3 si può scrivere

$$\text{non } (A \text{ e } B) = (\text{non } A) \bullet (\text{non } B)$$

Queste formule² valgono qualunque siano gli enunciati A e B e formule analoghe valgono nel caso in cui si compongono più di due enunciati...

ENUNCIATI COMPOSTI CHE CONTENGONO ESPRESSIONI E VARIABILI, SISTEMI DI EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Esempio

Consideriamo l'espressione $x > 5$, che interpretiamo come l'enunciato con una variabile

$$P = \text{«il numero } x \text{ è maggiore di 5»}.$$

La negazione di P è:

$$\begin{aligned} \text{non } P &= \text{«il numero } x \text{ non è maggiore 5»} = \\ &= \text{«il numero } x \text{ è minore di 5 } \bullet \text{ Il numero } x \text{ è uguale a 5»} \end{aligned}$$

²Si chiamano *regole di De Morgan*, ma il nome non è importante.

che si rappresenta con l'espressione $x \leq 5$. In particolare, sostituendo il numero 1 alla variabile x si ottiene l'enunciato $1 \leq 5$, che è vero. A questo punto potrebbe nascere l'obiezione:

**è vero che $1 \leq 5$,*

ma noi sappiamo qualcosa di più,

precisamente sappiamo che $1 < 5$

e quindi dovremmo dare questa informazione più precisa

Questa obiezione può avere un senso quando si comunica fra persone, infatti in tal caso è spesso opportuno dare l'informazione più completa, precisa ed economica disponibile, ma resta che l'enunciato $1 \leq 5$ è vero. Analogamente osserviamo che l'enunciato $5 \leq 5$ è vero.

Esempio

L'espressione $x \geq 3$ è un enunciato aperto con una variabile, che decidiamo di chiamare Q . Possiamo scrivere questo enunciato a parole nella forma seguente:

$Q = \text{«}x \text{ è uguale a } 3 \text{ } \mathbf{o} \text{ } x \text{ è maggiore di } 3\text{»}$ (*)

L'insieme dei numeri reali che, sostituiti alla variabile x nell'enunciato aperto Q , lo rendono vero si dice:

insieme delle soluzioni della disequazione $x \geq 3$,

Tale insieme, che si denota $\{x \in R: x \geq 3\}$, si può descrivere dicendo che esso:

comprende il numero 3 $\mathbf{e}$ comprende tutti i numeri maggiori di 3 (**)

Si noti come intervengono, scambiandosi, i connettivi “ $\mathbf{e}$ ” ed “ $\mathbf{o}$ ” nelle frasi (*) e (**). Questo comportamento può talvolta portare a confusione.

Esempio

Consideriamo gli enunciati P e Q introdotti nei precedenti esempi 3.7.1 e 3.7.2 e formiamo il nuovo enunciato:

$S = (\text{non } P) \mathbf{e} Q$

che a parole si dice:

« x non è maggiore di 5» $\mathbf{e}$ « x è maggiore o uguale di 3»

ossia, in modo più breve e scorrevole,

x è minore o uguale di 5 ed è maggiore o uguale di 3

Questo enunciato si può condensare con la scrittura:

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

con la quale si intende affermare che gli enunciati a destra della parentesi graffa sono uniti dalla congiunzione **e**. Si dice comunemente che questo è un *sistema di disequazioni*. Un sistema di questo tipo si indica talvolta con la notazione abbreviata

$$3 \leq x \leq 5$$

Deve però essere ben chiaro che tale notazione riassume **due** enunciati connessi dal connettivo “**e**”. Inoltre, al bisogno, si deve passare alla notazione estesa, altrimenti non è raro che si generi confusione.

Esempio

Riprendendo il discorso avviato negli esempi precedenti, consideriamo l'enunciato $Q = \langle x \geq 3 \rangle$ e consideriamo l'insieme $E = \{x \in R: Q\}$ dei numeri che rendono vero Q , ossia l'insieme:

$$E = \{x \in R: x \geq 3\}$$

In modo analogo, consideriamo l'enunciato $M = \langle x \leq 5 \rangle$ e consideriamo l'insieme $F = \{x \in R: M\}$ dei numeri che rendono vero M , ossia l'insieme:

$$F = \{x \in R: x \leq 5\}$$

Consideriamo infine l'insieme *intersezione di E ed F*, che si denota:

$$E \cap F$$

ed è definito come l'insieme degli elementi che appartengono a entrambi gli insiemi E ed F . Vediamo così che:

$$E \cap F = \{x \in R: Q \text{ e } M\}$$

In generale, se A, B sono enunciati aperti, entrambi con una variabile x che può prendere valori all'interno di un certo insieme U , si ha:

$$\{x \in U: A \text{ e } B \text{ è vero}\} = \{x \in U: A \text{ è vero}\} \cap \{x \in U: B \text{ è vero}\}$$

che si scrive più brevemente:

$$\{x \in U: A \text{ e } B\} = \{x \in U: A\} \cap \{x \in U: B\}$$

Esempio

L'espressione $x \geq y$ è un enunciato con *due variabili*.

Ogni volta che ai simboli x, y si sostituiscono dei numeri reali si ottiene un enunciato. L'enunciato è vero se x è maggiore di y ed è vero anche se $x = y$. In particolare, ad esempio:

$100 \geq 2$ è vero

$100 \geq 100$ è vero

$1 \geq 2$ è falso

ENUNCIATI CHE CONTENGONO LE PAROLE "TUTTI" O "PER OGNI"

Abbiamo visto nella sez. 3.4 che unendo due enunciati tramite il connettivo di congiunzione "e" si ottiene un nuovo enunciato; e abbiamo convenuto che tale nuovo **enunciato** sia da considerare vero se e soltanto se entrambi gli enunciati da cui è stato ottenuto sono veri. Questa costruzione può essere generalizzata, unendo tramite la congiunzione "e" un numero maggiore di enunciati oppure utilizzando le parole "per ogni" o "tutti". Cominciamo osservando che con gli enunciati

«il numero 4 è pari», «il numero 18 è pari», «il numero 24 è pari»,

possiamo costruire il nuovo enunciato:

«il numero 4 è pari e il numero 18 è pari e il numero 24 è pari»

che è vero perché tutti gli enunciati che lo compongono sono veri. Nel linguaggio comune scriveremmo in suo luogo la frase:

«i numeri 4, 18 e 24 sono pari»

che è più agile ma non evidenzia gli enunciati elementari che la compongono.

Possiamo collegare col connettivo di congiunzione "e" più enunciati, ottenendone uno nuovo che è vero se e soltanto se tutti gli enunciati che lo compongono sono veri.

Esempio

I numeri 4, 5, 6, 8 sono pari e i numeri 3, 7, 21 sono dispari.

Questo enunciato è la forma compatta di:

«il numero 4 è pari e il numero 5 è pari e il numero 6 è pari e il numero 8 è pari e il numero 3 è dispari e il numero 7 è dispari e il numero 21 è dispari»

ed è falso, perché almeno uno degli enunciati che lo compongono (precisamente: *«il numero 5 è pari»*) è falso.

Se indichiamo con E l'insieme formato dai numeri 4, 18 e 24 (cioè: $E = \{4, 18, 24\}$), l'enunciato

«i numeri 4, 18 e 24 sono pari»

si può riformulare come:

«tutti gli elementi di E sono pari»

o anche:

«ogni elemento di E è pari».

Possiamo anche scrivere:

«per ogni $x \in E$, x è pari»

dove *« x è pari»* è un enunciato aperto con una variabile.

L'espressione *“per ogni $x \in E$ ”* si scrive anche:

$$\forall x \in E$$

dove il simbolo “ $\forall$ ” si legge “per ogni”.

La notazione introdotta nella sezione precedente è utile quando vogliamo congiungere molti enunciati che esprimono tutti la stessa proprietà, e diventa indispensabile quando gli enunciati non sono un numero finito: con tale notazione possiamo ad esempio scrivere

«ogni multiplo di 4 è pari»

che ha lo stesso significato di:

«tutti i multipli di 4 sono pari»

ed equivale a:

«per ogni x appartenente all'insieme dei multipli di 4, x è pari»

Ossia:

« $\forall x \in M$, x è pari», dove M è l'insieme dei multipli di 4.

Questo enunciato è vero poiché sono veri **tutti** gli enunciati che si ottengono dall'enunciato aperto *« x è pari»* sostituendo alla variabile x un elemento dell'insieme considerato.

Esempio

Ogni numero primo è dispari.

Questo enunciato è la forma compatta di:

«per ogni x appartenente all'insieme dei numeri primi, x è dispari»

ed è falso, perché, cercando tra i numeri primi, trovo il numero 2, che sostituito alla variabile x nell'enunciato aperto

« x è dispari»

produce l'enunciato

«2 è dispari»

che è falso.

In generale, se $A(x)$ è un enunciato aperto con la variabile x , l'enunciato:

$$\forall x \in E, A(x)$$

che significa:

«per ogni elemento x di E , è vero $A(x)$ »

è **vero** se sono veri tutti gli enunciati che si ottengono sostituendo gli elementi di E alla variabile x , ed è invece **falso** se c'è almeno un elemento (anche uno solo!) dell'insieme E che, sostituito a x , dà luogo a un enunciato falso.

ENUNCIATI CHE CONTENGONO LE PAROLE “ESISTE UN” O “PER ALMENO UN”

Abbiamo visto nella sez. 3.6 che, unendo due enunciati tramite il connettivo di disgiunzione non esclusiva **o**, si ottiene un nuovo enunciato, che è vero se e soltanto se è vero almeno uno dei due enunciati da cui è stato ottenuto. Questa costruzione può essere generalizzata, unendo tramite il connettivo **o** più enunciati.

Esempio

Con gli enunciati:

«il numero 5 è pari», «il numero 18 è pari», «il numero 37 è pari»,

possiamo costruire il nuovo enunciato:

*«il numero 5 è pari **o** il numero 18 è pari **o** il numero 37 è pari»*

che è vero, perché almeno uno degli enunciati che lo compongono (precisamente: *«il numero 18 è pari»*) è vero. Nel linguaggio comune scriveremmo in suo luogo la frase

«almeno uno dei numeri 5, 18 e 37 è pari»

che è più agile, ma non evidenzia gli enunciati elementari che la compongono (e contiene la congiunzione “e” anziché la congiunzione “o”; cosa che può portare a confondersi a proposito della struttura logica della frase).

In modo analogo possiamo collegare col connettivo **o** più di tre di enunciati. L’enunciato che così si ottiene è vero se e soltanto se **almeno uno** degli enunciati che abbiamo collegato è vero.

Esempio

Almeno uno fra i numeri 4, 5, 6, 7, 8 è un numero primo.

Questo enunciato è la forma compatta di:

*«il numero 4 è primo **o** il numero 5 è primo **o** il numero 6 è primo **o** il numero 7 è primo **o** il numero 8 è primo»*

ed è vero, perché tra gli enunciati che lo compongono ce n’è almeno uno che è vero (precisamente, ce ne sono due: *«il numero 5 è primo»* e *«il numero 7 è primo»*).

L’enunciato si può riformulare come:

«almeno un elemento di E è un numero primo»

dove indichiamo con la lettera E l'insieme che ha come elementi i numeri 4, 5, 6, 7, 8, ossia:

«**esiste almeno un** elemento di E che è un numero primo».

oppure anche:

«**esiste almeno un** $x \in E$ tale che x è un numero primo»

dove « x è un numero primo» è un enunciato aperto con una variabile.

L'espressione «**esiste almeno un** $x \in E$ » si scrive anche:

$$\exists x \in E$$

dove il simbolo " $\exists$ " si legge "esiste almeno un". Il nostro enunciato diventa così:

« $\exists x \in E$ tale che x è un numero primo»

Se si ritiene che non siano possibili fraintendimenti, l'espressione "**esiste almeno un**" si dice brevemente "**esiste un**".

L' enunciato:

«l'equazione $x^2 + 4x + 3 = 0$ ha qualche soluzione positiva»

equivale a:

«esiste un numero positivo x , che è soluzione di $x^2 + 4x + 3 = 0$ »

Tale enunciato è vero se e soltanto se è vero **almeno uno** degli enunciati che si ottengono dall'enunciato aperto:

« x è soluzione di $x^2 + 4x + 3 = 0$ »

sostituendo alla variabile x un numero positivo. Dunque è falso, poiché l'equazione $x^2 + 4x + 3 = 0$ è soddisfatta soltanto dai numeri $x = -1$ e $x = -3$, essendo $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

La frase "esiste almeno un" e la notazione appena introdotta sono utili in particolare quando vogliamo esprimere una disgiunzione non esclusiva fra un numero grande (o anche infinito) di enunciati che esprimono tutti la stessa proprietà. Ad esempio, l'enunciato

$G =$ «esiste un numero primo strettamente maggiore di 200»

equivale a:

«esiste un x appartenente all'insieme W tale che x è un numero primo»

dove W è l'insieme dei numeri naturali x tali che $x > 200$.

L'enunciato G è vero se e soltanto se è vero **almeno uno** degli enunciati che si ottengono dall'enunciato aperto:

« x è un numero primo»

sostituendo alla variabile x un elemento di W . In effetti questo accade mettendo ad esempio il numero 211 al posto di x . Pertanto l'enunciato G è vero.

NEGAZIONE DEGLI ENUNCIATI CHE CONTENGONO LE PAROLE "TUTTI", "PER OGNI", "ESISTE UN" O "PER ALMENO UN"

Consideriamo l'enunciato:

$A = \text{«ogni numero primo è dispari»}$

che si può scrivere:

$\text{«}\forall x \in P, x \text{ è dispari}\text{»},$

dove P è l'insieme dei numeri primi.

La negazione di A è l'enunciato:

non $A = \text{«non ogni numero primo è dispari»}$

che equivale a:

$\text{«esiste un numero primo che non è dispari»}.$

Si può anche scrivere:

non $A = \text{«}\exists x \in P, x \text{ non è dispari}\text{»}$

ossia:

non $A = \text{«}\exists x \in P, \text{non } (x \text{ è dispari})\text{»}$

In sintesi, si ha:

non $\text{«}\forall x \in P, x \text{ è dispari}\text{»} = \text{«}\exists x \in P, \text{non } (x \text{ è dispari})\text{»}$

In generale, se $B(x)$ è un enunciato aperto, la negazione dell'enunciato

$\text{«}\forall x \in E, B(x)\text{»}$

è

non $\text{«}\forall x \in E, B(x)\text{»} = \text{«}\exists x \in E \text{ tale che } \text{non } B(x)\text{»}$

In termini "meccanici", partendo da un enunciato che contiene un **non** davanti a un **per ogni**, si ottiene un enunciato equivalente procedendo così: *si sposta la negazione "non" a destra del per ogni e si cambia quest'ultimo in esiste un*.

Attenzione! per ottenere la negazione di A **non basta spostare** il connettivo “**non**” a destra del “**per ogni**”, **bisogna anche cambiare** “**per ogni**” in “**esiste almeno un**”. Ad esempio, la negazione dell’enunciato

«**ogni** lunedì del mese scorso **ho** mangiato una mela»

non è:

«**ogni** lunedì del mese scorso **non ho** mangiato una mela»

ed è invece:

«in **almeno un** lunedì del mese scorso **non ho** mangiato una mela»

Consideriamo l’enunciato aperto:

$A(x) = \text{«esiste un numero intero } x \text{ tale che } x^2 = 728\text{»}$

che si può scrivere:

$\text{«}\exists x \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x^2 = 728\text{»,}$

dove $\mathbf{Z}$ è l’insieme dei numeri interi.

La negazione di $A(x)$ è l’enunciato aperto:

non $A(x) = \text{«non esiste un numero intero } x \text{ tale che } x^2 = 728\text{»}$

che equivale a:

$\text{«per ogni numero intero } x, \text{ si ha } x^2 \neq 728\text{»}.$

Questo si può anche scrivere:

$\text{«}\forall x \in \mathbf{Z} \ x^2 \neq 728\text{»}.$

In altre parole, si ha:

non $\text{«}\exists x \in \mathbf{Z} \text{ tale che } x^2 = 728\text{»} = \text{«}\forall x \in \mathbf{Z} \text{ **non** } (x^2 = 728)\text{»}$

In generale, se $B(x)$ è un enunciato aperto, la negazione dell’enunciato

$\text{«}\exists x \in E \text{ tale che } B(x)\text{»}$

è

non $\text{«}\exists x \in E \text{ tale che } B(x)\text{»} = \text{«}\forall x \in E \text{ **non** } B(x)\text{»}$

In termini “meccanici”, partendo da un enunciato che contiene un **non** davanti a un esiste (**almeno un**), si ottiene un enunciato equivalente procedendo così: si sposta la negazione “**non**” a destra di **esiste** e si cambia quest’ultimo in **per ogni**.

Attenzione! per ottenere la negazione di $A(x)$ non basta spostare il connettivo “non” a destra della parola “esiste”, bisogna anche cambiare “esiste” in “per ogni”. Ad esempio, la negazione dell’enunciato

«esiste almeno un giorno del mese scorso in cui ho fatto esercizio fisico»

non è:

«esiste almeno un giorno del mese scorso in cui non ho fatto esercizio fisico»

ed è invece:

«in ogni giorno del mese scorso non ho fatto esercizio fisico»

che però usualmente si esprime:

«in nessun giorno del mese scorso ho fatto esercizio fisico»

ENUNCIATI DEL TIPO «**PER OGNI X, SE A(X) ALLORA B(X)**»

In questa sezione presentiamo alcuni esempi di enunciati del tipo

«per ogni x , se $A(x)$ allora $B(x)$ »

dove alla variabile x si possono sostituire gli elementi di un certo insieme dato E .

I teoremi della matematica e le leggi scientifiche sono spesso in questa forma ed è importante avere dei modi per valutare se un enunciato di questo tipo è vero o falso. Discutendo tali questioni riusciremo a chiarire l’utilità della tavola di verità che nella sezione [Il collettivo logico “SE... allora”](#) si è scelta per l’implicazione e vedremo come si usano le espressioni “condizione necessaria” e “condizione sufficiente”.

Esempio

Con riferimento alla figura qui sotto:

$\frac{4}{3}$	34	3.11
6	60	7

consideriamo l'enunciato:

$P = \text{«sulla tabella tutti i numeri scritti in carattere grande sono interi pari»}$

che è vero, poiché i numeri scritti in carattere grande sulla tabella sono 6 e 34, e questi sono numeri pari.

L'enunciato P è equivalente a:

$\text{«per ogni numero } x \text{ nella tabella, se } x \text{ è scritto in carattere grande allora } x \text{ è pari»}$

che diventa:

$\text{«per ogni numero } x \text{ nella figura, se } A(x) \text{ allora } B(x)\text{»}$

dove si è posto:

$A(x) = \text{«}x \text{ è scritto in carattere grande»}$

$B(x) = \text{«}x \text{ è pari»}$

Essendo l'enunciato vero, sono vere tutte le implicazioni del tipo

$\text{«se } x \text{ è scritto in carattere grande allora } x \text{ è pari»}$

che si ottengono sostituendo a x ciascuno dei numeri sulla tabella per controllare che sia effettivamente così, scriviamo tali implicazioni:

- I. $\text{«se } \frac{4}{3} \text{ è scritto in carattere grande allora } \frac{4}{3} \text{ è pari»}$
- II. $\text{«se } 34 \text{ è scritto in carattere grande allora } 34 \text{ è pari»}$
- III. $\text{«se } 3.11 \text{ è scritto in carattere grande allora } 3.11 \text{ è pari»}$
- IV. $\text{«se } 6 \text{ è scritto in carattere grande allora } 6 \text{ è pari»}$

V. «se 60 è scritto in carattere grande allora 60 è pari»

VI. «se 7 è scritto in carattere grande allora 7 è pari»

Si vede che sono tutte vere grazie alla tavola di verità dell'implicazione (che abbiamo introdotto nella sezione 3.4). Infatti:

- nelle implicazioni I, III, V, VI l'antecedente è falso, e quindi l'implicazione è vera qualunque sia il valore di verità del conseguente;
- nelle implicazioni II e IV l'antecedente e il conseguente sono entrambi veri, e quindi l'implicazione è vera.

Nelle situazioni, come quella vista sopra, in cui è vero l'enunciato

«per ogni x , se $A(x)$ allora $B(x)$ »

si dice che l'enunciato $A(x)$ è una *condizione sufficiente* per l'enunciato $B(x)$. Un altro modo per esprimere la stessa cosa è dire che $B(x)$ è una *condizione necessaria* per $A(x)$. Si noti che in questo uso le parole "necessario" e "sufficiente" indicano semplicemente una constatazione di fatto. Non affermano che $A(x)$ è *causa* di $B(x)$ (non è escluso che ci sia un nesso causale, ma non è detto).

Cosa accade se, ancora con riferimento alla figura del punto 3.11.2, consideriamo l'enunciato:

Q = «per ogni numero x nella figura, se x è pari allora x è scritto in carattere grande»

Ossia:

«per ogni numero x nella figura, se $B(x)$ allora $A(x)$ »

dove, rispetto all'enunciato P considerato sopra, gli enunciati $A(x)$ e $B(x)$ si sono scambiati di posto nell'implicazione?

Si vede subito che l'enunciato Q è falso, infatti sulla figura c'è scritto un numero pari (precisamente, il numero 60) che non è scritto in carattere grande; ossia esiste un numero x scritto sulla figura per il quale è falsa l'implicazione «se $B(x)$ allora $A(x)$ ». Non possiamo dunque dire che $B(x)$ è una condizione sufficiente per $A(x)$, o che $A(x)$ è necessario per $B(x)$.

ESEMPI DI CONDIZIONI NECESSARIE, CONDIZIONI SUFFICIENTI, CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI

Cominciamo col definire una situazione, che useremo poi per fare alcuni esempi di condizioni necessarie e di condizioni sufficienti. Un certo esame consiste nel sostenere due prove. Il punteggio di ogni prova è un numero intero da zero a quattro. L'esito complessivo dell'esame è determinato dal punteggio nelle due prove, come indicato nella tabella qui sotto.

criterio per stabilire se l'esame è superato		punteggio y nella seconda prova				
		0	1	2	3	4
	0	NO	NO	NO	NO	NO
	1	NO	NO	NO	NO	SÌ
	2	NO	NO	NO	SÌ	SÌ
	3	NO	NO	SÌ	SÌ	SÌ
	4	NO	SÌ	SÌ	SÌ	SÌ

Chiamiamo x il voto nella prima prova e y il voto nella seconda. Per sapere se, in corrispondenza a una certa coppia ordinata di voti (x, y) , l'esame è superato oppure no, si legge la casella che si trova all'incrocio tra la riga x e la colonna y . Ad esempio, con i voti $(1, 2)$ la risposta è NO.

Le possibili coppie ordinate di voti (x, y) sono 25.

Consideriamo la situazione seguente.

Sappiamo che nella prima prova Mario ha preso il voto 3. Sapendo questo, ci chiediamo se è vero l'enunciato

A = «se Mario nella seconda prova prende un voto maggiore di 2, allora supera l'esame»

La risposta è sì, l'enunciato A è vero. Infatti ci sono due possibili casi di voto maggiore di 2: $y=3$ e $y=4$ e dalla tabella vediamo che in entrambi i casi Mario supera l'esame. In una situazione come questa, sapendo che il voto nella prima prova è $x=3$, diciamo che *prendere un voto y maggiore di 2 nella seconda prova* è una **condizione sufficiente** per *superare l'esame*, che in simboli si scrive

$$y > 2 \Rightarrow \text{Mario supera l'esame.}$$

Invece, la condizione $y > 2$ **non è necessaria**, poiché ci sono casi in cui l'esame è superato anche se $y > 2$ è falso, ad esempio il caso in cui $y=2$. Questo equivale a dire che in questa situazione non è vera l'implicazione

$$\text{Mario supera l'esame} \Rightarrow y > 2$$

Consideriamo l'enunciato:

B = «per ogni possibile coppia di voti (x,y) nelle due prove,

$$x + y > 5 \Rightarrow \text{l'esame è superato}»$$

Controllando tutti i possibili casi sulla tabella si vede che l'enunciato B è vero. Possiamo dire che $x + y > 5$ è una **condizione sufficiente** per superare l'esame. Tale condizione **non è necessaria**, ossia è falso che

«per ogni possibile coppia di voti (x,y) nelle due prove,

$$\text{l'esame è superato} \Rightarrow x + y > 5 »$$

Invece, come si può controllare sulla tabella, è vero che:

«per ogni possibile coppia di voti (x,y) nelle due prove,

$$x + y \geq 5 \Leftrightarrow \text{l'esame è superato}»$$

ossia l'esame è superato **se e solo se** la somma dei voti è maggiore o uguale di 5.

In altre parole: **che la somma dei voti sia maggiore o uguale di 5 è condizione necessaria e sufficiente affinché l'esame sia superato.**

Nell'esempio che precede abbiamo visto che invece di scrivere tutta la tabella dei possibili voti con il relativo esito dell'esame si può dare la stessa informazione dicendo che l'esame viene superato se e solo se la somma dei voti nelle due prove è maggiore o uguale di 5. L'utilità di condensare l'informazione in alcune regole è ancora più evidente in situazioni più complicate, in cui si presenta un numero grande o infinito di casi, che non sarebbe possibile indicare per esteso. Bisogna

dunque essere capaci di esprimere precisamente le regole che condensano l'informazione voluta e di ottenere da esse le informazioni desiderate. Vedremo alcuni esempi.

Consideriamo la seguente situazione:

*Un esame consiste nel sostenere due prove. Il punteggio di ogni prova è un numero intero da 0 a 10 compreso. Si supera l'esame **se e solo se** la somma dei due punteggi è non inferiore a 12.*

Osserviamo che la situazione delle due prove è simile a quella considerata sopra, ma, per indicare i casi in cui l'esame è superato, qui non abbiamo dato la tabella di tutti i casi possibili e abbiamo invece dato una regola generale:

*«si supera l'esame **se e solo se** la somma dei due punteggi è non inferiore a 12».*

ossia:

condizione necessaria e sufficiente affinché l'esame sia superato è che la somma dei voti nelle due prove sia non inferiore a 12,

che si può dire anche:

*«per ogni possibile coppia (x,y) di voti nella prima e seconda prova, l'esame è superato **se e solo se** $x + y \geq 12$ »*

Ci mettiamo ora in questa **situazione particolare**: **sappiamo che nella prima prova lo studente ha preso 4**. In questa situazione vogliamo studiare le relazioni fra gli enunciati A e B seguenti:

A = «Lo studente nella seconda prova ha preso 8»

B = «Lo studente ha superato l'esame».

Ci chiediamo: è vero che

da A segue B?

Ossia ci chiediamo: è vero che

nel caso in cui lo studente prende 8 nella seconda prova, lo studente supera l'esame?

La risposta è **Sì**. Infatti, sappiamo già che il voto della prima prova è 4, perciò la somma dei voti nelle due prove è $4 + 8 = 12$. Dalla regola generale abbiamo quindi che l'esame è superato. In questa situazione si dice che:

A è **condizione sufficiente** per B oppure, più brevemente: A è *sufficiente* per B

B è **condizione necessaria** per A oppure, più brevemente: B è *necessario* per A

Ora ci chiediamo: nella stessa situazione di sopra, è vero che:

da B segue A?

Ossia, precisamente, ci chiediamo se è vero che

in tutti i casi in cui l'esame è superato e il voto nella prima prova è 4 si ha anche che il voto nella seconda prova è 8.

La risposta è **No**. Infatti, ci sono casi nei quali l'esame viene superato e il voto nella seconda prova non è 8. Ricordando la regola generale, questo avviene se il voto nella seconda prova è 9 (anche se è 10).

Ancora sapendo che il voto nella prima prova è 4, consideriamo il nuovo enunciato

$A' = \text{«Lo studente nella seconda prova ha preso almeno 6»}$

Ci chiediamo se è vero che:

A' è una condizione sufficiente per B.

Questo enunciato è equivalente a:

in tutti i casi in cui lo studente nella seconda prova ha preso un voto maggiore o uguale di 6, lo studente ha superato l'esame

I casi in questione sono $y = 6$, $y = 7$, $y = 8$, $y = 9$, $y = 10$ e, ricordando la regola generale, si vede che nei casi $y = 6$ e $y = 7$ l'esame non è superato. Dunque, **non è vero che l'enunciato A' è una condizione sufficiente per B**. Osserviamo che questo fatto si può esprimere dicendo che, nella situazione considerata, è falso che:

per ogni possibile voto y nella seconda prova, **se** $y \geq 6$ **allora** l'esame è superato

Però si controlla facilmente che è vero l'enunciato "inverso":

per ogni possibile voto y nella seconda prova, **se** l'esame è superato **allora** $y \geq 6$

Quest'ultimo enunciato equivale a dire che **A' è una condizione necessaria per B** ossia che **B è una condizione sufficiente per A'** .

D'ora in avanti non ci mettiamo più nella situazione particolare di sapere il voto della prima prova. Consideriamo l'enunciato:

$C = \text{«Lo studente nella prima prova ha preso almeno 5 e nella seconda prova ha preso almeno 7»}$

Se C è vero, possiamo dire qualcosa riguardo all'esito dell'esame? Per rispondere potremmo elencare ed esaminare tutti i casi possibili, che sono 24, ma possiamo invece ragionare come segue:

per ogni possibile coppia di voti (y, x) , tali che $x \geq 5$ e $y \geq 7$ si ha $x + y \geq 5 + 7 = 12$, dunque in ogni caso lo studente ha superato l'esame.

Ricordando che $B = \text{«Lo studente ha superato l'esame»}$, il ragionamento appena fatto è una **dimostrazione** dell'enunciato:

per ogni coppia (x, y) di voti possibili, **se** C **allora** B (*)

Infatti, presa una coppia di voti qualsiasi ci sono due possibilità:

- C è vero; in tale caso, come abbiamo appena dimostrato, anche B è vero; quindi l'implicazione **se** C **allora** B è vera;
- C è falso; in tale caso l'implicazione **se** C **allora** B è vera comunque sia B .

In questa situazione si dice che l'enunciato C è una **condizione sufficiente** per il superamento dell'esame. Abbiamo appena visto che, grazie a una breve dimostrazione, è possibile evitare di considerare un gran numero di casi. La necessità di usare le dimostrazioni è poi evidente nel caso in cui si voglia dimostrare che un certo enunciato aperto è vero per tutti i valori che una variabile può prendere in un **insieme infinito**. Alcuni esempi di tali situazioni si vedranno più avanti.

Ci chiediamo ora se l'enunciato C del punto precedente è una condizione necessaria per superare l'esame. Questo equivale a chiedersi se è vero l'enunciato:

$E = \text{in tutti i casi possibili, se uno studente supera l'esame, allora è vero } C.$

L'enunciato E è falso, poiché si vede immediatamente che esistono dei casi in cui lo studente supera l'esame e C non è vero; ad esempio il caso $x = 3, y = 9$. Un esempio come questo si dice che è un **controesempio** all'enunciato E .

USI E AMBIGUITÀ DEL LINGUAGGIO NATURALE AI QUALI OCCORRE FARE ATTENZIONE.

1. Le parole “alcuni”, “qualche” e la negazione.

Esempio

Consideriamo l'enunciato:

«In alcuni giorni del 1921 è piovuto a Sarego» (i)

che riteniamo voglia dire:

«In almeno un giorno del 1921 è piovuto a Sarego»

La sua negazione è:

«Non è vero che in alcuni giorni del 1921 è piovuto a Sarego»

ossia:

«In ogni giorno del 1921 non è piovuto a Sarego» (ii)

Attenzione: come si è detto già in [Negazione degli enunciati che...](#), la negazione di (*) non è

«In alcuni giorni del 1921 non è piovuto a Sarego» (iii)

che non equivale a (ii).

Osserviamo che abbiamo ritenuto la frase “in alcuni giorni del 1921” equivalente a “in almeno un giorno del 1921”. Questo è l'uso della parola “alcuni” che più correntemente si fa nel linguaggio scientifico ed è simile all'uso della parola “qualche”, che abbiamo visto in [Enunciati che contengono le parole...](#).

L'uso comune delle parole “qualche” e “alcuni” può differire da “almeno uno”, nel senso che “qualche” e “alcuni” possono dare l'idea che i giorni ai quali ci si riferisce sono in numero imprecisato, ma comunque *maggiore* di uno. Se ai fini della comunicazione questa ambiguità è rilevante, occorre precisare cosa si vuole dire. Con l'espressione “almeno uno” si intende invece inequivocabilmente che si parla di “uno o più di uno”.

Osserviamo inoltre che la verità dell'enunciato (i) non esclude che sia vero l'enunciato “*tutti* i giorni del 1921 è piovuto a Sarego”. Tuttavia, se qualcuno ci dice (i), noi siamo portati a pensare che non sia vero che è piovuto tutti i giorni a Sarego nel 1921, o almeno che chi parla non lo sa. Questo è dovuto al fatto che chi ascolta si aspetta che, se fosse piovuto *tutti* i giorni (e se chi parla lo avesse saputo), allora chi parla avrebbe detto “*tutti* i giorni” e non avrebbe detto “*alcuni* giorni”. Una tale aspettativa fa parte della normale *cooperazione* che adottano le persone impegnate in

una conversazione³ e da aspettative di questo tipo si traggono ordinariamente molti significati e molte conseguenze di ciò che si dice, che non sono significati letterali e non sono deduzioni logiche. Tali significati si dicono *implicature conversazionali*. Questo meccanismo è importante e utilissimo nella comunicazione ordinaria. Ma nella comunicazione argomentativa e descrittiva rigorosa ci sono situazioni in cui si deve tenere conto soltanto dei significati letterali e delle deduzioni logiche che si possono trarre dagli enunciati, altrimenti si generano fraintendimenti ed errori. Gli studenti e anche i docenti devono essere consapevoli di questi meccanismi e di quando avvengono, così da adottare le precisazioni eventualmente necessarie al fine di comprendersi bene.

2. Doppia negazione apparente

La negazione dell'enunciato (i), ossia l'enunciato (ii), si può esprimere anche

«nel 1921 **non** è piovuto a Sarego» (iv)

Se neghiamo (iv), otteniamo l'enunciato

«**non** è vero che nel 1921 **non** è piovuto a Sarego»

che equivale a (i); in altre parole, come abbiamo visto nel secondo esempio di [Negazione di un enunciato...](#), la doppia negazione di (i), ottenuta usando due volte la parola “non”, è uguale a (i). Vogliamo ora osservare che ci sono espressioni del linguaggio naturale che hanno l'aspetto di una doppia negazione, ma in realtà non lo sono. Infatti, consideriamo l'enunciato

«**mai** nel 1921 è piovuto a Sarego»

anche questo si può considerare equivalente a (iv), che è la negazione di (i); dunque in questa frase la parola “mai” produce una negazione. Consideriamo poi la frase

«nel 1921 **non** è **mai** è piovuto a Sarego» (v)

in questa frase si usano entrambe le parole “non” e “mai”, ciascuna delle quali abbiamo visto che da sola può essere usata per negare l'enunciato (i). Si potrebbe quindi essere indotti a pensare che l'espressione “non è mai” che si trova in (v) sia una doppia negazione di “è piovuto a Sarego”. Ma non è così che conviene pensare. Invece è opportuno fare affidamento sul significato di (v), che è chiaramente lo stesso di (iv). Si comprende così che nell'espressione “non è mai” la parola “mai” non produce un'ulteriore negazione ma semplicemente rafforza il precedente “non”. D'altra parte, se diciamo

«non è vero che mai nel 1921 è piovuto a Sarego»

questa è proprio una doppia negazione e ha lo stesso valore di verità dell'enunciato (i).

³ I principi di cooperazione e le implicature conversazionali che ne conseguono sono stati studiati in particolare da Paul Grice [https://it.wikipedia.org/wiki/Paul_Grice#Logic_and_conversation_\(1975\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Paul_Grice#Logic_and_conversation_(1975))

Situazioni analoghe si hanno in frasi del tipo “non ho visto nessuno”, “non ho visto neanche uno di loro”, “non ho capito niente”, “non ho fatto nulla di buono”, che sono negazioni, rafforzate, delle frasi “ho visto qualcuno”, “ho visto qualcuno di loro”, “ho capito qualcosa”, “ho fatto qualcosa di buono”.

3. Disgiunzione esclusiva e disgiunzione inclusiva

Consideriamo la frase:

«Un numero intero è pari o dispari» (i)

che riteniamo intenda esprimere l'enunciato

«Per ogni numero intero x , x è pari o x è dispari» (ii)

dove abbiamo esplicitato il quantificatore “per ogni”. Tale enunciato letteralmente significa (o dovrebbe significare)

«Per ogni numero intero x , è vero *almeno uno* degli enunciati: “ x è pari”, “ x è dispari”»

L'enunciato qui sopra è vero. Il fatto che per nessun numero intero siano veri *entrambi* gli enunciati “ x è pari”, “ x è dispari” non dà alcun problema logico.

Osserviamo di passaggio che in molte frasi del linguaggio ordinario sono sottintesi i quantificatori, ossia le parole come “per ogni” ed “esiste”, e che è utile esserne consapevoli ed esplicitarli se occorre. Molti teoremi di matematica, molte leggi scientifiche e molte norme hanno una struttura logica del tipo (ii) o simili e occorre essere consapevoli dei quantificatori che si vogliono intendere, anche se non sono scritti esplicitamente. E nel dubbio occorre chiedere un chiarimento.

Consideriamo ora la frase:

«Per ogni numero intero x , almeno uno degli enunciati:
“ x è pari”, “ x è dispari” è vero, ma non sono veri entrambi» (iii)

e anche la frase:

«Per ogni numero intero x , almeno uno degli enunciati: “ x è pari”, “ x è dispari” è vero, ma non sono veri entrambi»

e «Esistono numeri x tali che x è pari»

e «Esistono numeri x tali che x è dispari.» (iv)

Gli enunciati (iii) e (iv) sono diversi fra loro e diversi da (ii), però talvolta chi dice (ii) intende affermare (iii) o talvolta (iv). Esempi analoghi si trovano in molte frasi che si usano ordinariamente e tuttavia l'ambiguità non dà problemi, poiché l'intenzione di chi parla è chiara dal contesto o poiché la confusione non ha importanza - proprio questo favorisce la diffusione degli usi imprecisi. Ci sono però situazioni, ad esempio in matematica o nelle norme, in cui la differenza tra i significati

di (ii), (iii), (iv) ha conseguenze di rilievo. Dunque è opportuno essere sempre consapevoli delle ambiguità, valutarne l'eventuale importanza e, se necessario, adottare formulazioni adeguate a precisare ciò che si vuole affermare.

Se si usa (i) per affermare (iii) si dice che si dà alla parola "o" la funzione di "*disgiunzione esclusiva*". Invece se si usa (i) per affermare (ii), si dice che si dà alla parola "o" la funzione di "*disgiunzione inclusiva*". Ad esempio, quando si elencano i requisiti per la partecipazione a un concorso si usa la disgiunzione inclusiva: chi dice "*per partecipare occorre avere la laurea in Lettere o la laurea in Filosofia*", non intende escludere dalla partecipazione chi ha conseguito entrambe le lauree.

4. Diversi usi della congiunzione "e".

Consideriamo la frase:

(*) «Aldo e Bruna hanno un cane»

Questa frase si può intendere come:

(i) «Aldo e Bruna hanno lo stesso cane»

Oppure:

(ii) «Aldo e Bruna hanno un cane ciascuno».

In effetti la (*) equivale a:

«Aldo ha un cane» e «Bruna ha un cane»

e questo lascia imprecisato se si tratti dello stesso cane oppure no.

Consideriamo poi la frase:

(*) «Aldo e Bruna hanno un cane e un gatto»

Anche questa frase può avere diversi significati:

(iii) «Aldo ha un cane e un gatto» e «Bruna ha un cane e un gatto»

dove di nuovo si può intendere che il cane e il gatto di Aldo sono gli stessi di Bruna, oppure no;

(iv) «Aldo ha un cane» e «Bruna ha un gatto»

(v) «Aldo ha un gatto» e «Bruna ha un cane»

Osserviamo infine che la frase «Aldo ha un cane» letteralmente è vera se Aldo ad esempio ha tre cani, ma chi la dice usualmente intende affermare che Aldo ha *un solo* cane. Nella comunicazione ordinaria, il significato che si intende per tutte le frasi di sopra è determinato dal contesto, dalla

conoscenza che i parlanti hanno delle rispettive intenzioni comunicative e dalla usuale cooperazione che c'è in tali casi. In situazioni non ordinarie, ad esempio nelle discipline scientifiche, quando i contesti sono poco familiari, se i parlanti non sono certi delle reciproche intenzioni e non possono o non vogliono del tutto cooperare (ad esempio in un esame universitario), è necessario essere consapevoli delle possibili ambiguità, valutare la loro importanza caso per caso e adottare formulazioni opportunamente precise.

Un uso ancora diverso della congiunzione “e” si vede nel seguente enunciato

(i) «l'intersezione dei tre insiemi A , B , e C è vuota»

In questo caso la “e” non congiunge due frasi, ma serve solamente per sostituire una virgola nell'elenco degli elementi di un insieme. Infatti, se al posto di “e” si mette una virgola il significato non cambia. L'enunciato di sopra si può pensare come un enunciato aperto con tre variabili A , B , C , che in simboli si scrive

(ii) « $A \cap B \cap C = \emptyset$ »

Osserviamo che l'enunciato (ii) non è equivalente a

(iii) $A \cap B = \emptyset$ e $A \cap C = \emptyset$ e $B \cap C = \emptyset$.

Ricordiamo che l'enunciato $A \cap B = \emptyset$ si esprime in parole dicendo che “gli insiemi A , B sono *disgiunti*”. L'enunciato (iii) si esprime in parole dicendo che “gli insiemi A , B , C sono *due a due disgiunti*”.

Una situazione diversa si ha nell'enunciato con tre variabili

(iv) «Le rette r , s , e t sono parallele»

che equivale a

(iii) $r//s$ e $r//t$ e $s//t$

dove il simbolo⁴ $r//s$ denota in breve l'enunciato «le rette r , s sono parallele», ossia la *relazione di parallelismo* tra due rette. Ulteriormente diversa dalle precedenti è la situazione nell'enunciato

«i numeri 3,5,7 sono primi»

che equivale a:

«3 è primo» e «5 è primo» e «7 è primo».

⁴ La relazione di parallelismo, che denotiamo $r//s$, è transitiva, simmetrica e riflessiva, pertanto si possono definire le classi di equivalenza rispetto a tale relazione. L'enunciato (iii) significa dunque che le tre rette r, s, t appartengono a una stessa classe di equivalenza di rette parallele.

5. Frasi condizionali

Nel linguaggio naturale si usano frasi di diversi tipi e significati nelle quali si trova la parola “se”. Tali frasi si dicono *condizionali*. Non tutte queste frasi si possono o si devono intendere come implicazioni logiche nel senso che abbiamo definito nelle sezioni precedenti. Questo accade in particolare per le frasi che hanno i verbi al modo congiuntivo e al modo condizionale, ad esempio i condizionali controfattuali. Non ci interessa in questa sede considerare tali tipi di frasi. Consideriamo invece qualche esempio di enunciati condizionali che sono implicazioni.

La frase:

«se piove prendo l’ombrello»

si intende come l’implicazione:

piove $\Rightarrow$ prendo l’ombrello (i)

dove accettiamo che «piove» e «prendo l’ombrello» abbiano un significato determinato in un contesto che condividiamo, e siano quindi enunciati. Ricordiamo che in questa situazione si dice che:

“piove” è una *condizione sufficiente* per “prendo l’ombrello”.

Invece la frase:

«prendo l’ombrello *solo se* piove»

si intende come l’implicazione:

non piove $\Rightarrow$ **non** prendo l’ombrello (ii)

che è equivalente a

prendo l’ombrello $\Rightarrow$ piove (iii)

la quale si esprime anche dicendo che

“piove” è una *condizione necessaria* per “prendo l’ombrello”.

Osserviamo che (iii) è l’implicazione che abbiamo chiamato *contronominale* di (ii) ed è anche l’implicazione che abbiamo chiamato *inversa* di (i). Non è importante conoscere questi nomi, ma è importante comprendere chiaramente le relazioni tra le diverse implicazioni e i modi di esprimerle.

Infine, la frase:

«prendo l’ombrello *se e solo se* piove»

equivale alla doppia implicazione:

piove $\Leftrightarrow$ prendo l’ombrello.

In tal caso si dice che “piove” è una condizione “*necessaria e sufficiente*” per “prendo l’ombrello”.

In un contesto matematico, quando si afferma che un’implicazione del tipo $A \Rightarrow B$ è vera, spesso si intende dire che la verità dell’enunciato B si può *dimostrare* a partire dalla verità dell’enunciato A, e dalla verità di altri enunciati che già si conosce, attraverso una catena di deduzioni logiche. Nel contesto di una scienza sperimentale, affermando $A \Rightarrow B$ spesso si intende dire che l’evento A è causa dell’evento B. Tali significati e tali usi delle implicazioni sono importanti, anzi essenziali, per la costruzione delle teorie scientifiche e in generale della conoscenza. D’altra parte, come abbiamo detto nella sezione 3.11, un’implicazione $A \Rightarrow B$ può essere vera senza che B sia dimostrabile a partire da A, senza che si abbia alcuna relazione di causa-effetto tra la verità di A e la verità di B, e senza che ci sia alcun nesso di significato tra A e B.

Osserviamo infine che non tutte le frasi condizionali che sono implicazioni vere hanno significati sensati. Ad esempio, gli enunciati:

«3 è un numero dispari», «Roma è la capitale d’Italia»

sono entrambi veri, pertanto, tenuto conto della definizione data in 3.3.3, entrambe le seguenti implicazioni sono vere:

(i) «3 è un numero dispari» $\Rightarrow$ «Roma è la capitale d’Italia»

(ii) «Roma è la capitale d’Italia» $\Rightarrow$ «3 è un numero dispari»

D’altra parte, entrambe sono poco interessanti, nel senso che in esse non c’è alcun nesso logico o semantico fra l’antecedente e il conseguente dell’implicazione e non ci sono situazioni naturali in cui possa venire in mente di dirli. Ancora meno interessanti sono le implicazioni del tipo:

(iii) «3 è un numero pari» $\Rightarrow$ «il koala è un mammifero»

dove l’antecedente è falso, che sono vere qualunque enunciato si metta come conseguente.

Interessanti e molto usati sono invece gli enunciati come:

(i) «se x è un quadrilatero che ha i lati opposti uguali,
allora x ha gli angoli opposti uguali»,

che conviene pensare nella forma:

(ii) «per ogni quadrilatero x, $A(x) \Rightarrow B(x)$ »,

dove:

$A(x)$ = «x ha i lati opposti uguali»,

$B(x)$ = «x ha gli angoli opposti uguali»

sono enunciati aperti nella variabile x, che prende i suoi valori nell’insieme dei quadrilateri.

Nelle sezioni 3.11 e 3.12 abbiamo già visto esempi di questo tipo di enunciati. Ricordiamo nuovamente che i teoremi della matematica, le leggi scientifiche e le norme sono spesso di questa forma.

COLLEGAMENTI COL NUCLEO² SUI "PROBLEMI"

In questa sezione vogliamo mostrare alcuni esempi di come i concetti e gli schemi elementari di ragionamento presentati nelle sezioni precedenti di questo nucleo, sono utilizzati, in modo più o meno esplicito, per risolvere i problemi che si trovano nel secondo nucleo tematico. In particolare, indicheremo alcuni esempi di catene di deduzioni che, a partire da certe premesse date, consentono di dedurre la verità o la falsità di enunciati che costituiscono la soluzione del problema.

Nello svolgimento della soluzione del problema (1) *Sabati e domeniche*, si è affermato che "il mese di gennaio ha 31 giorni, quindi ha almeno 4 sabati", che è una forma contratta di una serie di enunciati e implicazioni: "gennaio ha 31 giorni", "se un mese ha 31 giorni, allora contiene almeno 4 settimane intere", "se un mese contiene 4 settimane intere, allora ha almeno 4 sabati". È possibile notare che la catena di implicazioni può essere ulteriormente raffinata, per esempio affermando "in ogni settimana c'è almeno (in realtà, esattamente) un sabato", ma in realtà chi risolve problemi può agire a diversi livelli di complessità, per esempio affermando immediatamente che "il mese di gennaio ha almeno 4 sabati" oppure lavorando con una catena di implicazioni più o meno complessa.

Nel problema (5) *Resto*, si è scritto "Franco non può avere 2 o più banconote da 5, perché allora potrebbe cambiare 10 euro in due banconote da 5. Quindi Franco ha 0 o 1 banconote da 5". Esplicitiamo il ragionamento che si è fatto: si usa una conoscenza comune ("esistono banconote da 5 euro"), non richiamata esplicitamente nel testo del problema; una conoscenza che deriva dalla matematica di base (" $5 \times 2 = 10$ "); e un'affermazione che viene data nel testo del problema, "Franco non può cambiare 10 euro". Si ottiene così che è vera l'implicazione "se Franco ha almeno 2 banconote da 5, allora può cambiare 10 euro". Da questa, sapendo che l'enunciato conseguente è falso, si conclude che l'enunciato antecedente è falso. Dunque Franco ha meno di due banconote da 5, ossia ne ha 0 oppure 1.

Nel problema (7) *Codice cifrato*, una delle possibili strategie per risolvere il problema si basa sulla seguente catena di deduzioni: a ogni parola cifrata, viene applicata una trasformazione che prende ogni lettera della parola e la sostituisce con la lettera successiva. Nella parola cifrata ci sono due lettere "P". La lettera "P" deriva dalla lettera "O". Quindi, nel testo originale della parola ci sono due lettere "O". Fra le opzioni di risposta ce n'è soltanto una che ha due lettere "O": la parola "FLOOD". Quindi tutte le altre opzioni sono false. A questo punto, senza verificare come si sono trasformate le altre lettere, sapendo, dalle "regole" del test che *esiste almeno una risposta corretta*, questa deve essere FLOOD. Si noti che si possono considerare molte altre catene di implicazioni corrette, che però non è detto che aiutino a risolvere il problema. Ad esempio, nel testo cifrato è presente la lettera "M", che deriva dal testo in chiaro "L". Questo non consente di

individuare la risposta, poiché ci sono due opzioni che contengono la lettera "L", "FLOOD" e "LODGE". Bisogna dunque procedere ulteriormente e trovare altre catene di deduzioni (più lunghe) per selezionare la risposta.

I quesiti del tipo (12) *L'Isola di Smullyan* (furfanti e cavalieri) si trovano spesso nei testi e nelle prove di logica. Molti di questi quesiti si possono risolvere esplorando sistematicamente tutti i casi e accertando i valori di verità delle affermazioni. Quando i casi sono pochi, si tratta di semplici esercizi, che possono essere dati in un test. Quando le situazioni sono complesse, per rispondere diventa importante adottare opportune strategie. In tal caso riteniamo che i quesiti debbano essere considerati dei problemi; perciò, li abbiamo messi nel QdR Problemi.

Ricordiamo il seguente quesito, che si trova nel punto (12) del QdR *Problemi*.

Problema 1:

Fra tre abitanti A, B, C dell'Isola di Smullyan, si svolge il seguente dialogo:

A: Fra noi c'è almeno un furfante (Affermazione 1)

B: Fra noi c'è almeno un cavaliere (Affermazione 2)

Cosa possiamo dedurre da questo dialogo?

In quella sede abbiamo scritto il seguente ragionamento:

Consideriamo l'abitante A: se è un furfante, è vero che esiste almeno un furfante fra A, B, C. Quindi A ha detto il vero e quindi non può essere un furfante. Quindi A è un cavaliere. Poiché A è un cavaliere, esiste almeno un cavaliere. Ma questo significa che B ha detto il vero, è quindi anche B è un cavaliere. Poiché esiste almeno un furfante, questi deve essere C.

Esplicitiamo più chiaramente la catena di deduzioni che abbiamo appena fatto.

Se:

1. A è un furfante

Allora:

2. esiste almeno un furfante fra A, B, C.

Quindi:

3. l'affermazione 1 è vera, ossia A ha detto il vero.

Quindi:

4. A non è un furfante.

Gli enunciati 1 e 4 si contraddicono, quindi i è falso ed è vera la sua negazione, ossia che:

5. A è un cavaliere.

Quindi:

6. esiste almeno un cavaliere.

Quindi:

7. l'affermazione 2 è vera, ossia B ha detto il vero.

Quindi:

8. B è un cavaliere.

Dal fatto che l'affermazione 1 è vera, e poiché A e B sono cavalieri (punti 5 e 8) si deduce infine che:

9. C è un furfante.

Per ulteriori esempi e analisi si rimanda al nucleo tematico *Problemi*. Qui vogliamo comunque sottolineare che:

- è importante avere un approccio "aperto" alla soluzione dei problemi; dalle premesse che si hanno a disposizione si possono dedurre molteplici conclusioni, per diverse vie, ma solo alcune di queste portano a una risposta; bisogna quindi essere pronti a provare molte strade e occorre avere strategie per scegliere le più utili;
- la capacità di fare deduzioni corrette è fondamentale per risolvere problemi, ma non è detto che per fornire soluzioni corrette (e convincenti) sia necessario scrivere tutti gli enunciati e tutti i passi in modo formale.

ESEMPI ED ESERCIZI COMPLESSIVI

Esempio 1

Consideriamo il quesito seguente:

Sapendo che:

1. alcuni plantigradi sono orsi
2. nessun cavallo è un plantigrado

quale delle seguenti affermazioni possiamo dedurre?

- A.** Alcuni cavalli non sono orsi
- B.** Nessun cavallo è un orso
- C.** Nessun orso è un cavallo
- D.** Alcuni orsi non sono cavalli
- E.** Ogni orso è un cavallo

Qui è chiaro che (a parte la risposta E che è falsa nel senso comune) le prime quattro risposte sono affermazioni vere nel mondo che ci circonda. Però soltanto la “D” si deduce dalle premesse: le altre sono vere come dati di fatto relativi a orsi e cavalli, ma non sono conseguenza delle premesse. Questo esempio illustra un aspetto fondamentale del ragionamento logico. Per rispondere al quesito occorre capire che le parole “plantigrado”, “orso” e “cavallo” devono essere considerate dei “segnaposto” dei quali sono note soltanto le proprietà stabilite dalle premesse, senza farsi distrarre dal fatto che, nell’uso e nella conoscenza comune, sappiamo molte altre cose sui cavalli e gli orsi (meno sui plantigradi...). Una strategia utile può quindi essere quella di sostituire una lettera a ciascuna di tali parole. In questo modo si ottiene il quesito in una forma che possiamo chiamare *astratta*, nella quale non siamo più indotti in confusione:

Sapendo che:

- i. alcuni X sono Y
- ii. nessun Z è un X

quale delle seguenti affermazioni possiamo dedurre?

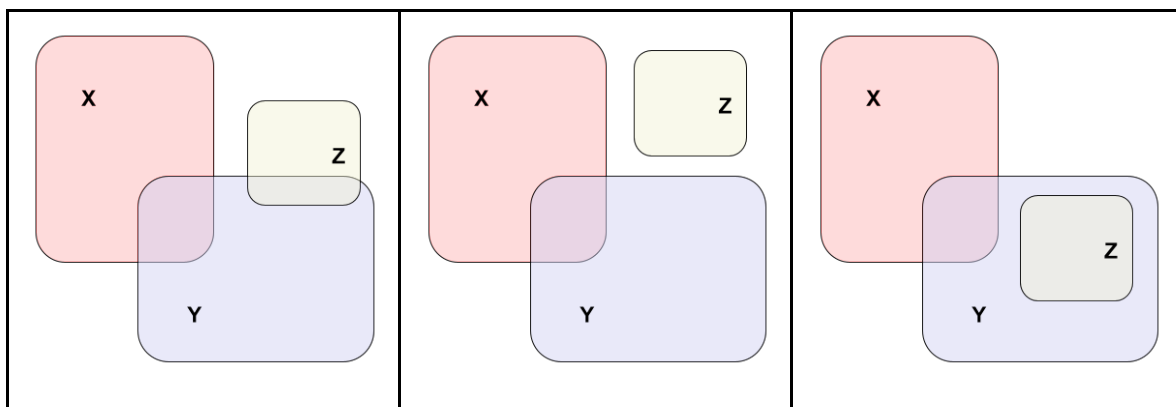
- A.** Alcuni Z non sono Y
- B.** Nessun Z è un Y

- C.** Nessun Y è un Z
- D.** Alcuni Y non sono Z
- E.** Ogni Y è un Z

A questo punto può essere utile dare una rappresentazione grafica delle informazioni fornite con le premesse, che possono essere riformulate come segue:

- l'insieme X e l'insieme Y hanno elementi in comune, ossia $X \cap Y \neq \emptyset$
- l'insieme X e l'insieme Z non hanno elementi in comune, ossia $X \cap Z = \emptyset$

dove abbiamo deciso di chiamare X l'insieme degli X , eccetera. Le situazioni possibili si possono dunque descrivere con le tre figure seguenti:



dalle quali si comprende che:

- Z può essere disgiunto da Y (figura centrale), quindi **A** non si può dedurre dalle premesse;
- Z può essere contenuto in Y , quindi **B** non si può dedurre dalle premesse;
- Z può avere elementi comuni con Y e non essere contenuto in Y (figura a sinistra), quindi **C** non si può dedurre dalle premesse.

Inoltre:

- l'affermazione **D** si deduce dalle premesse, poiché la premessa i dice che esistono elementi di Y che appartengono anche a X , e ii dice che tali elementi non appartengono a Z ;
- l'affermazione **E** è falsa a maggior ragione di **D**.

Il quesito può apparire a prima vista un po' astruso e difficile, ma a seguito di una riflessione attenta, seguendo il ragionamento fatto sopra e dopo qualche autonoma riconsiderazione,

dovrebbe diventare perfettamente chiaro e semplice. Quello sarà per gli studenti il segnale che avranno acquisito una competenza utile.

Esercizio 2

Abbiamo un sacchetto che contiene i numeri della tombola (da 1 a 90). Ci poniamo le seguenti quattro domande (le risposte sono dopo l'ultima domanda).

- Domanda 1** Un giocatore pesca due numeri, li guarda e dice “La somma dei numeri che ho pescato è dispari”. Possiamo concludere che almeno uno dei due numeri è pari?
- Domanda 2** Un giocatore pesca due numeri, li guarda e dice “La somma dei numeri che ho pescato è dispari”. Possiamo concludere che almeno uno dei due numeri è dispari?
- Domanda 3** Un giocatore pesca due numeri, li guarda e dice “Almeno uno dei due numeri che ho pescato è dispari”. Possiamo concludere che la somma dei numeri pescati è dispari?
- Domanda 4** Un giocatore pesca due numeri, li guarda e dice “Almeno uno dei due numeri che ho pescato è pari”. Possiamo concludere che la somma dei numeri pescati è dispari?

Le risposte alle quattro domande di sopra sono le seguenti.

D1: Sì **D2:** Sì **D3:** No **D4:** No

Esercizio 3

Consideriamo i seguenti enunciati a proposito di una coppia di numeri interi estratti dal sacchetto della tombola:

- Uno dei due numeri è pari
- I due numeri sono consecutivi
- Il primo numero pescato è dispari
- Uno dei due numeri è pari e l'altro è dispari.

Per ciascuno di tali enunciati si dica se è una condizione

1. necessaria e sufficiente;
2. necessaria, ma non sufficiente;
3. sufficiente, ma non necessaria;
4. non necessaria, né sufficiente;

affinché la somma dei due numeri sia dispari.

Le risposte sono raccolte nella seguente tabella

Enunciato	necessaria e sufficiente	necessaria ma non sufficiente	sufficiente ma non necessaria	non necessaria né sufficiente
Uno dei due numeri è pari		X		
I due numeri sono consecutivi			X	
Il primo numero pescato è dispari				X
Uno dei due numeri è pari e l'altro è dispari.	X			

Quesito (dal Quadro di riferimento per la Matematica)

Per definizione, un *poligono regolare* è un poligono che ha tutti i lati tra loro uguali e tutti gli angoli tra loro uguali. Dunque, un poligono non regolare:

- A.** ha gli angoli a due a due diversi e i lati a due a due diversi;
- B.** ha gli angoli a due a due diversi o i lati a due a due diversi;
- C.** ha tutti gli angoli uguali tra loro e i lati a due a due diversi;
- D.** ha tutti i lati uguali tra loro e gli angoli a due a due diversi;
- E.** ha almeno una coppia di angoli diversi o almeno una coppia di lati diversi;
- F.** ha almeno una coppia di angoli diversi e almeno una coppia di lati diversi.

La risposta corretta è la **E**.

ESEMPI DI QUESITI ASSEGNATI NEI TEST DI INGRESSO TOLC

Quesito (dal Mentor di Logica, n.25)

25. Il cuoco Giovanni osserva che cucinando l'arrosto se non si usa il forno a gas la carne o è cruda all'interno o è bruciata all'esterno o entrambe le cose.
Quindi se ne deduce che
- A. se l'arrosto ha l'interno ben cotto è stato cotto nel forno a gas
 - B. se l'arrosto ha l'interno ben cotto o non è bruciato all'esterno è stato cotto nel forno a gas
 - C. se l'arrosto ha l'interno ben cotto e non è bruciato all'esterno è stato cotto nel forno a gas
 - D. se l'arrosto è crudo all'interno non è stato cotto nel forno a gas
 - E. se l'arrosto è stato cotto nel forno elettrico la carne è cruda all'interno e bruciata all'esterno

Risoluzione

Il quesito chiede di stabilire quale tra le implicazioni indicate nelle opzioni di risposta si può dedurre dall'implicazione

non uso il forno a gas $\Rightarrow$ (la carne è cruda all'interno)

☐ (la carne è bruciata all'esterno). (i)

che possiamo riscrivere

$A \Rightarrow B \text{ } \text{ } C$ (ii)

dove

A = non uso il forno a gas

B = la carne è cruda all'interno

C = la carne è bruciata fuori

Sapendo che l'antecedente è vero, come nel caso della risposta E), possiamo dedurre⁵ che è vero l'enunciato $B \circ C$, ossia che *almeno uno* degli enunciati B, C è vero (eventualmente entrambi); non possiamo dedurre che *entrambi* B e C sono veri; pertanto l'opzione E) è falsa.

Le implicazioni che si trovano nelle altre risposte hanno gli enunciati B o C nell'antecedente. Conviene allora ricordare che l'implicazione (*) è vera se e solo se vale

$$\text{non } (B \circ C) \Rightarrow \text{non } A \quad (\text{iii})$$

ossia

se entrambi A e B non sono veri, allora l'arrosto è stato cotto nel forno a gas (iv)

Pertanto, la risposta C è corretta. Sapendo che può esserci una sola risposta corretta, le altre opzioni devono essere false. Può comunque essere interessante verificare direttamente questo fatto, ma lo lasciamo al lettore interessato.

Osserviamo che ci si aspetta che lo studente sia in grado di riconoscere che (iv) è equivalente a (i) senza passare per la scrittura simbolica che si usa in (ii) e in (iii); tuttavia pensiamo che tale scrittura possa essere utile per chiarire la struttura logica degli enunciati e dei ragionamenti considerati.

Commento.

Nel testo della domanda, alla frase "la carne è cruda all'interno o è bruciata all'esterno" è stato aggiunto "o entrambe le cose", in modo da evitare un possibile fraintendimento tra l'uso esclusivo e l'uso inclusivo della congiunzione "o". In che modo un tale fraintendimento avrebbe potuto mettere in difficoltà chi vuole rispondere al quesito?

Nella domanda e nelle opzioni di risposta del quesito non ci sono virgole. Per le attività di autovalutazione/apprendimento è utile chiedere agli studenti di esercitarsi a inserirle nei luoghi opportuni e cercare eventuali formulazioni anche più chiare e scorrevoli. Insieme agli studenti si può ad esempio arrivare alla formulazione seguente

Il cuoco Giovanni, che spesso cucina l'arrosto, osserva che, se non si usa il forno a gas, allora la carne è cruda all'interno o è bruciata all'esterno o entrambe le cose.

Si osserva infine che molti cuochi non condividono l'affermazione di Giovanni a proposito della cottura al forno.

⁵ Ci si aspetta che questo tipo di deduzione sia evidente. Si veda la sezione 3.2 dove l'abbiamo chiamata "schema di ragionamento 1".

Quesito

Consideriamo le seguenti affermazioni:

- Tutti i matematici sono distratti
- Luigi ama nuotare
- Tutte le persone che amano nuotare sono distratte

Se queste affermazioni sono vere, quale altra, tra le seguenti affermazioni, è necessariamente vera?

- A.** Tutte le persone distratte amano nuotare
- B.** Luigi è un matematico
- C.** Tutte le persone distratte sono matematici
- D.** Luigi è distratto
- E.** Tutti i matematici amano nuotare

Soluzione e commento. L'affermazione vera è la D. "Luigi è distratto", che segue dalle premesse "Tutte le persone che amano nuotare sono distratte" e "Luigi ama nuotare". La prima delle premesse fornite nella domanda non serve per dare la risposta. Le affermazioni A, B, C, E non si deducono dalle premesse; infatti, per ciascuna di tali affermazioni si possono trovare delle situazioni in cui le premesse sono vere, ma l'affermazione è falsa; è proprio per indicare questo, che nella domanda si trova scritto "quale altra è *necessariamente vera*".

L'esercizio utile da fare con questo quesito è di vederne la struttura astratta e comprendere bene la situazione. A questo fine chiamiamo M l'insieme dei matematici, N l'insieme delle persone che amano nuotare e S l'insieme delle persone distratte. Le premesse si possono allora formulare così:

i. per ogni x , $x \in M \Rightarrow x \in S$

ii. $Luigi \in N$

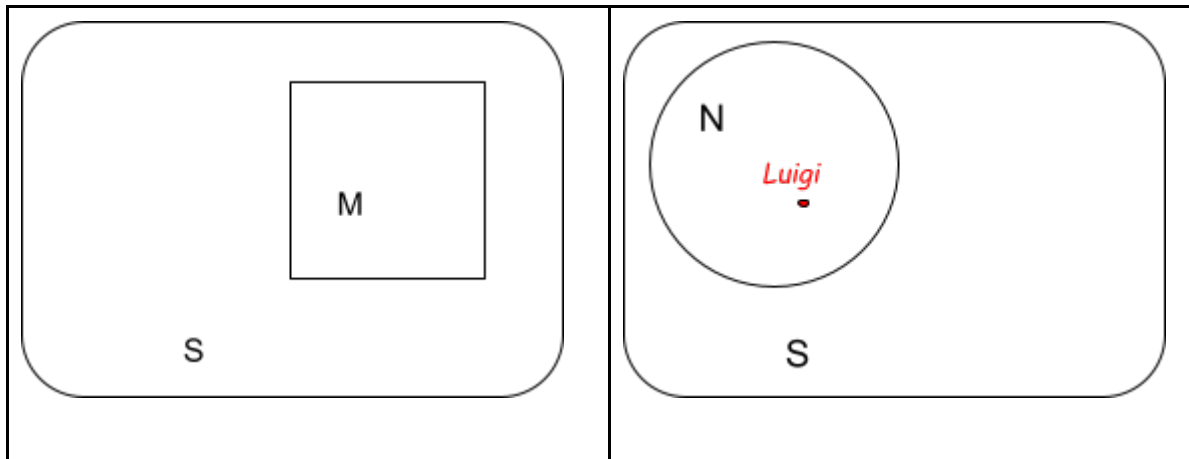
iii. per ogni x , $x \in N \Rightarrow x \in S$

Sostituendo Luigi alla variabile x nell'enunciato aperto iii si ottiene l'enunciato

$$Luigi \in N \Rightarrow Luigi \in S$$

Da questo e dall'enunciato ii, utilizzando lo schema di ragionamento 1 che si è introdotto nelle sezioni 3.2, 3.3, si ottiene che è vero $Luigi \in S$.

Conviene dare una rappresentazione grafica della situazione. Possiamo rappresentare l'affermazione i con la figura sotto a sinistra e le affermazioni ii e iii con la figura sotto a destra.



Dalla figura sopra a destra si vede immediatamente che Luigi è distratto.

Per quanto riguarda le altre affermazioni si osserva che:

- possono esserci elementi di S che non appartengono a N, ossia non possiamo concludere che A è vera;
- possono esserci elementi di S che non appartengono a M, ossia non possiamo concludere che C è vera;
- non è detto che Luigi sia un matematico e quindi non possiamo concludere che B è vera;
- M può essere disgiunto da N e quindi non possiamo concludere che E è vera.

Quesito

7. Il codice della strada impone a tutti i conducenti di auto di assicurarsi di avere a bordo del veicolo il giubbotto catarifrangente ed il triangolo.

Purtroppo, a Driveland, questa norma non viene sempre rispettata.

Pertanto possiamo affermare con sicurezza che a Driveland:

- A. c'è almeno un conducente che, a bordo del veicolo, o non ha il giubbotto catarifrangente o non ha il triangolo
- B. c'è un conducente che non ha il giubbotto catarifrangente a bordo del veicolo
- C. c'è un conducente che ha sia il triangolo che il giubbotto catarifrangente a bordo del veicolo
- D. c'è almeno un conducente che non ha nè il giubbotto catarifrangente nè il triangolo a bordo del veicolo
- E. c'è un conducente che non ha il triangolo a bordo del veicolo

Il testo del quesito chiede quale enunciato, tra le opzioni offerte, si può dedurre da ciò che viene affermato in premessa. Parte della difficoltà del quesito può stare nel comprendere che la premessa vuole semplicemente dire che

«non è vero che tutti i veicoli hanno a bordo il giubbotto e il triangolo»

ossia:

«c'è almeno un veicolo per cui non è vero che:

a bordo c'è il giubbotto e c'è il triangolo»

che equivale a:

«c'è almeno un veicolo per cui:

a bordo non c'è il giubbotto o non c'è il triangolo»

Dunque, la risposta corretta è la **A**.

Osserviamo che le parole “con sicurezza” nel testo del quesito sono inutili e si possono omettere.

Quesito

5. Il regolamento edilizio del comune prevede che non possa essere data l'abitabilità ad un immobile destinato ad abitazione se esso non rispetta i parametri richiesti di risparmio idrico ed energetico.

Questa legge viene sempre applicata e questo vuol dire che:

- A. tutte le abitazioni che rispettano i parametri richiesti di risparmio idrico rispettano anche quelli di risparmio energetico
- B. se un'abitazione rispetta i parametri richiesti di risparmio idrico ed energetico allora siamo sicuri che otterrà l'abitabilità
- C. rispettare i parametri richiesti di risparmio idrico ed energetico è una condizione necessaria per ottenere l'abitabilità
- D. rispettare i parametri richiesti di risparmio idrico ed energetico è una condizione sufficiente per ottenere l'abitabilità
- E. ci sono abitazioni che non rispettano i parametri richiesti di risparmio idrico ma che hanno l'abitabilità

Il testo del quesito è lungo, ma può accadere di incontrare testi di questo tipo e bisogna essere capaci di semplificarli e schematizzarli. Il primo passo è di sintetizzare il testo ad esempio come segue:

l'abitabilità è possibile **solo se** entrambi i parametri sono rispettati

che equivale (si vedano il paragrafo [Frasi condizionali](#) e [Negazione di un enunciato...](#)) a ciascuna delle due seguenti implicazioni

non (param. idrico ok **e** param. energ. ok) $\Rightarrow$ **non** abitabile

abitabile $\Rightarrow$ (param. idrico ok **e** param. energ. ok)

e si può esprimere in parole dicendo che:

entrambi i parametri ok è **condizione necessaria** per l'abitabilità

Quadro di riferimento di LOGICA:

LOGICA, RAGIONAMENTO E LINGUAGGIO NATURALE



Dunque, la risposta corretta è la **C**.