

# NUCLEO TEMATICO 2: **ESPRESSIONI, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI**

|                      |   |
|----------------------|---|
| 1. Descrizione       | 1 |
| 2. Esempi di quesiti | 3 |

## 1. DESCRIZIONE

### INTRODUZIONE

È utile che tu sappia operare con espressioni letterali e trasformarle opportunamente a seconda degli obiettivi; che tu sappia impostare, trasformare e risolvere semplici equazioni, disequazioni e sistemi. La conoscenza di semplici procedure e algoritmi è importante e ci si aspetta che tu li sappia eseguire con sicurezza in diverse situazioni; ma appare ancor più importante che tu sia in grado di gestirli con consapevolezza e flessibilità, mettendo in relazione, quando opportuno, le manipolazioni di espressioni ed equazioni con le proprietà delle operazioni tra numeri e le relazioni tra esse. Occorre infine che tu sappia utilizzare l'algebra come uno strumento per rappresentare ed elaborare idee o informazioni, e poter così affrontare e risolvere problemi in diversi contesti.

### CONOSCENZE

- Espressioni letterali: manipolazione e valutazione.
- Equazioni, disequazioni, sistemi di equazioni e disequazioni; soluzione e insieme delle soluzioni.
- Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado.
- Sistemi lineari.
- Polinomi in una indeterminata; radici di un polinomio, divisione con il resto, decomposizione in fattori.

## ABILITÀ

- E-1 Utilizzare lettere per rappresentare numeri, o più in generale elementi di un dato insieme, ed esprimere costanti, variabili, parametri o incognite.
- E-2 Interpretare espressioni con lettere come sequenze di operazioni e costruire espressioni con lettere per rappresentare sequenze di operazioni (nota: il termine operazioni qui include non solo somme, prodotti, ma più in generale funzioni come ad esempio le funzioni trigonometriche).  
Valutare espressioni assegnando determinati valori alle variabili che vi compaiono.  
Utilizzare lettere per rappresentare intere espressioni.
- E-3 Manipolare espressioni, uguaglianze e disuguaglianze tra espressioni, e trasformarle in altre equivalenti utilizzando le proprietà delle operazioni e quelle della relazione d'ordine. Mettere in relazione tali proprietà con le proprietà delle operazioni e dell'ordinamento tra numeri. Riconoscere la struttura delle espressioni. Cogliere relazioni particolari tra espressioni diverse.
- E-4 Data un'equazione, una disequazione, o un sistema di equazioni e/o disequazioni, che coinvolge  $n$  incognite, sapere che una sua soluzione in un dato insieme è costituita da una  $n$ -upla di elementi dell'insieme e stabilire se una certa  $n$ -upla è una sua soluzione.
- E-5 Sapere che due equazioni, due disequazioni o due sistemi sono equivalenti se l'insieme delle soluzioni di uno coincide con quello dell'altro. Manipolare equazioni, disequazioni e sistemi, in particolare per trasformarli in equazioni, disequazioni e sistemi ad essi equivalenti.
- E-6 Risolvere equazioni e disequazioni in un'incognita, di I o II grado, o ad esse riconducibili con semplici manipolazioni o sostituzioni.
- E-7 Risolvere sistemi lineari di due equazioni in due incognite.
- E-8 Risolvere sistemi di disequazioni di I o II grado in un'incognita.
- E-9 Applicare la legge di annullamento del prodotto per risolvere equazioni. Mettere in relazione il segno di un prodotto o di un quoziente tra espressioni al segno di ciascuna espressione, in particolare per risolvere disequazioni.
- E-10 Sapere che l'insieme delle soluzioni di un'equazione in due incognite può essere rappresentato come un insieme di punti nel piano cartesiano. In semplici casi fare ricorso a rappresentazioni nel piano cartesiano per studiare equazioni, disequazioni o sistemi.

- E-11 Sapere cosa vuol dire che un certo numero è radice di un polinomio. Stabilire se un numero è radice di un polinomio dato.
- E-12 Mettere in relazione le radici di un polinomio e i suoi fattori di primo grado.
- E-13 Eseguire la divisione con resto tra due polinomi. Conoscere le relazioni tra i gradi dei due polinomi, del quoziente e del resto.
- E-14 In casi elementari, scrivere un polinomio come prodotto di polinomi di grado minore.

## 2. ESEMPI DI QUESITI

### **Quesito 1**

Scrivi un'espressione letterale che rappresenti il rapporto tra il prodotto di due numeri e il quadrato della loro differenza. Valuta l'espressione quando i due numeri sono 3 e 5.

Risposta esatta

Abilità principali: **E-1, E-2**

### **Quesito 2**

Scrivi un'espressione letterale che rappresenti la somma di due numeri dispari consecutivi.

Risposta esatta

Abilità principali: **E-1, E-2**

### **Quesito 3**

Sia  $n$  un numero intero positivo. Scrivi un'espressione che rappresenti la differenza tra il quadrato di  $n$  e il quadrato dell'intero che precede  $n$ .

Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilisci se l'affermazione è vera o falsa.

- Per ogni intero positivo  $n$  l'espressione ottenuta rappresenta un numero dispari.
- Esiste almeno un intero positivo  $n$  per il quale l'espressione, valutata in  $n$ , dà un numero pari.
- Per ogni intero positivo  $n$  l'espressione ottenuta rappresenta la somma di  $n$  e del numero che lo precede.
- Esiste almeno un intero positivo  $n$  per il quale l'espressione, valutata in  $n$ , è uguale al prodotto di  $n$  e del numero che lo precede.

Risposta esatta

Abilità principali: **E-1, E-2, E-3**

#### **Quesito 4**

La tabella mostra i profitti di un'azienda in milioni di euro negli ultimi anni.

| 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|------|------|------|------|------|------|
| 6,5  | 8,5  | 9,8  | 8,5  |      | 11,8 |

Per un errore di stampa il dato del 2010 non compare. Si sa però che il profitto del 2010 è stato il 18% del profitto totale dei 6 anni. Quale delle seguenti equazioni permette di determinare il profitto dell'azienda del 2010, indicato con  $x$ ?

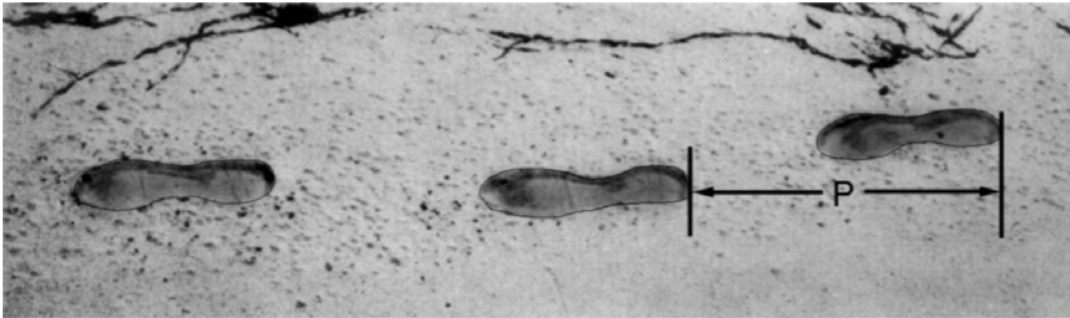
- A.**  $45,1 - 0,18x = x$
- A.**  $x = 0,18 \cdot (45,1 - x)$
- B.**  $x = 0,18 \cdot 45,1$
- C.**  $x = 0,18 \cdot (45,1 + x)$
- D.**  $45,1 + x = 0,18x$

[Risposta esatta](#)

*Prova di selezione ConScienze-CISIA del 7 settembre 2012*

Abilità principali: **E-1, E-2**

**Quesito 5**



Si stima che approssimativamente il numero di passi che un individuo compie camminando normalmente con andatura regolare in un certo periodo di tempo sia direttamente proporzionale alla lunghezza del suo passo. Più precisamente il valore della costante di proporzionalità tra il numero di passi al minuto e la lunghezza del passo in metri è approssimativamente 140.

1. Se si indicano con  $n$  il numero di passi al minuto e con  $P$  la lunghezza del passo in metri, quale delle seguenti uguaglianze esprime questa relazione?  
**A.**  $\frac{n}{P} = 140$   
**B.**  $nP = 140$   
**C.**  $n + P = 140$   
**D.**  $n = 140 - P$
2. Se questa relazione vale anche per l'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del suo passo? Qual è la sua velocità in km/h?
3. Giulia cammina per 2 ore facendo 12.000 passi. Se la relazione data sopra si applica anche alla sua andatura, quanti chilometri ha percorso Giulia in quelle 2 ore?

[Risposta esatta](#)

*Ispirato a un quesito della rilevazione OCSE-PISA 2003*

Abilità principali: **E-1, E-2**

**Quesito 6**

Per ogni numero reale  $x$ , l'espressione  $(2x + 2)^4 - (x + 1)^4$  è uguale a:

- A.**  $15(x + 1)^4$
- B.**  $7(x + 1)^4$
- C.**  $(x + 1)^4$
- D.**  $x^4 + 15$
- E.**  $15x^4 + 15$

[Risposta esatta](#)

*Prova di selezione ConScienze-CISIA del 9 settembre 2014*

Abilità principali: **E-3**

**Quesito 7**

Quale delle seguenti espressioni è equivalente all'espressione:

$$(-1 - 2x)^2 - (1 - 2x)^2$$

- A.**  $-8x$
- B.**  $8x$
- C.**  $2 + 4x^2$
- D.**  $2 - 4x^2$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-3**

### **Quesito 8**

La velocità del suono nell'aria dipende dalla temperatura. In assenza di umidità nell'aria la relazione tra velocità  $v$  misurata in m/s e temperatura  $T$  misurata in gradi Celsius è

$$v = 20,05 \cdot \sqrt{T + 273,15}$$

1. Esprimere la temperatura dell'aria in funzione della velocità del suono.
2. A quale delle seguenti temperature la velocità del suono è più vicina a 340 m/sec?
  - A.** 5°
  - B.** 10°
  - C.** 15°
  - D.** 20°

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-3, E-6**

### **Quesito 9**

Indica un numero che è soluzione della disequazione  $2x - 3 \geq 3x + 4$  e uno che non è soluzione.

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-4**

**Quesito 10**

L'insieme delle soluzioni di una delle seguenti disequazioni è  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ .

Di quale disequazione si tratta?

**A.**  $x^2 - 9x < 0$

**B.**  $x^2 - 9 < 0$

**C.**  $x^2 - 3x < 0$

**D.**  $x^2 - 9 > 0$

**E.**  $x^2 - 3x > 0$

[Risposta esatta](#)

*Prova di selezione ConScienze-CISIA del 9 settembre 2014*

Abilità principali: **E-4, E-6**

### **Quesito 11**

Dato un numero  $a$  diverso da 0, si consideri nell'equazione nell'incognita  $x$

$$x^2 = a^2.$$

Quale delle seguenti equazioni non è equivalente a essa (cioè non ha lo stesso insieme di soluzioni)?

- A.**  $x = a$
- B.**  $|x| = |a|$
- C.**  $(x + a)|x - a| = 0$
- D.**  $x^4 = a^4$

[Risposta esatta](#)

*Prova di verifica ConScienze-CINECA del 9 settembre 2010*

Abilità principali: **E-4, E-6**

### **Quesito 12**

Risolvi l'equazione:  $x^2 - x - 1 = 0$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-6**

**Quesito 13**

Risolvi la disequazione:  $x^2 > 0$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-6**

**Quesito 14**

Risolvi la disequazione:

$$\frac{3x - 1}{x + 1} \geq 1$$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-5, E-9**

**Quesito 15**

La disequazione  $x^2 + 9 \geq 0$  ha come soluzioni:

- A.** Tutti e soli i numeri reali  $x$  tali che  $3 \leq x \leq 3$
- B.** Tutti e soli i numeri reali  $x$  tali che  $x \leq 0$  o  $x \geq 3$
- C.** Nessun numero reale
- D.** Tutti i numeri reali

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-6, E-2**

**Quesito 16**

Il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

ha:

- A.** Infinite soluzioni
- B.** Esattamente due soluzioni
- C.** Esattamente una soluzione
- D.** Nessuna soluzione

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-7**

**Quesito 17**

Risolvi il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x > 1 \\ x < 2x - 2 \end{cases}$$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-8**

**Quesito 18**

Risolvi il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 4x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-5, E-6**

### Quesito 19

Associa a ogni disequazione o sistema della tabella di sinistra il suo insieme delle soluzioni tra gli insiemi contenuti nella tabella di destra:

|                                                             |                                        |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| A. $(x + 1)(x - 2) \geq 0$                                  | 1. $[2, +\infty[$                      |
| B. $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$                                 | 2. $[-1, 2]$                           |
| C. $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ | 3. $] - \infty, -1]$                   |
| D. $\begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$ | 4. $] - \infty, -1] \cup ]2, +\infty[$ |
|                                                             | 5. $] - \infty, -1] \cup [2, +\infty[$ |
|                                                             | 6. $\emptyset$                         |
|                                                             | 7. $\mathbb{R}$                        |

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-9, E-8, E-5**

### Quesito 20

Uno studente ha sostenuto alcuni esami universitari e la media dei voti conseguiti è 25. Oggi ha superato un nuovo esame con voto 30, e la sua media sale a 26. Quanti esami ha conseguito lo studente compreso quello di oggi?

[Risposta esatta](#)

*Prova di selezione ConScienze-CISIA del 9 settembre 2014*

Abilità principali: **E-2, E-3, E-6**

### **Quesito 21**

Uno delle seguenti disuguaglianze è vera per ogni coppia di numeri  $b$  e  $c$  tali che  $b < 0$  e  $c + b < 0$ ; quale?

**A.**  $bc^2 + c^3 > 0$

**B.**  $c^2 + bc > 0$

**C.**  $cb^2 + b^3 > 0$

**D.**  $b^2 + bc > 0$

[Risposta esatta](#)

*Prova di verifica ConScienze-CINECA del 9 settembre 2010*

Abilità principali: **E-3, E-9**

### **Quesito 22**

Risolvi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -10 \\ y - x = -10 \end{cases}$$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-8, E-5**

### **Quesito 23**

Laura investe 15.000 euro in due titoli azionari. Dopo un anno il controvalore complessivo è ancora 15.000; il valore del primo titolo è cresciuto del 10% rispetto al prezzo d'acquisto, mentre il valore del secondo è sceso del 15%. Quanti euro ha investito Laura in ciascuno dei due titoli?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-1, E-2, E-6, E-7**

### **Quesito 24**

Individua quale degli insiemi proposti è l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x < -1 \end{cases}$$

**A.**  $] - \infty, -2[ \cup ] - 1, 2]$

**B.**  $[-2, -1[$

**C.**  $] - \infty, -1[$

**D.**  $] - 1, 2]$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-8, E-2**

**Quesito 25**

Quante soluzioni reali ha l'equazione  $x^5 = 4x$ ?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-9, E-14**

**Quesito 26**

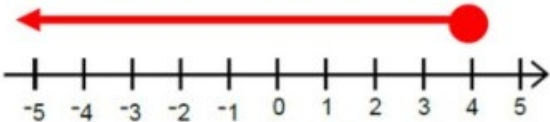
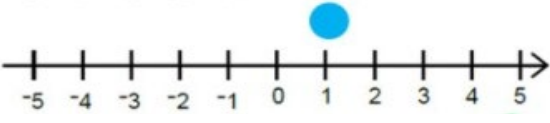
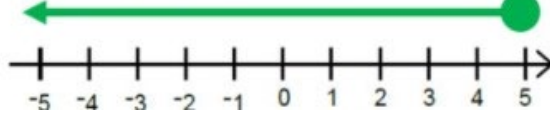
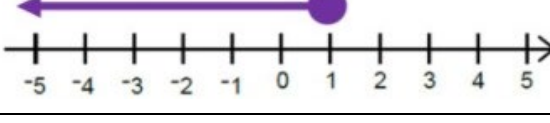
Risolvere la disequazione  $(x^2 - 1)(x + 2) > 0$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-9, E-8**

**Quesito 27**

Una delle seguenti immagini rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione  $2x + 3 \leq 5$ ; quale?

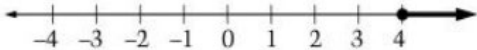
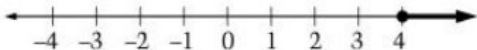
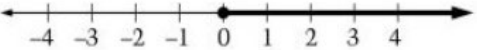
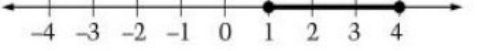
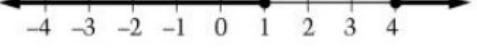
|   |                                                                                      |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
| A |    |
| B |    |
| C |    |
| D |  |

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-2, E-4, E-5, E-6**

**Quesito 28**

Una delle seguenti immagini rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione  $|2x - 5| \geq 3$ ; quale?

|   |                                                                                      |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
| A |    |
| B |    |
| C |    |
| D |    |
| E |  |

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-2, E-4, E-5**

**Quesito 29**

Scrivere una disequazione il cui insieme di soluzioni sia l'intervallo  $[1, 4]$ .

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-5, E-6**

**Quesito 30**

Quali tra i numeri  $0$ ,  $\sqrt{2} - 2$  e  $4$  sono radici del polinomio  $x^3 - 2x$ ?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-11**

**Quesito 31**

Considera il polinomio  $p(x) = x^6 - 2x^4 + 1$ , dove  $x \in R$ . Se  $a$  è radice di  $p(x)$ , allora:

- A.**  $a = 0$
- B.**  $a = 1$
- C.**  $a \notin \mathbb{Z}$
- D.**  $p(-a) = 0$
- E.**  $a > 0$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-11, E-3**

**Quesito 32**

Il polinomio  $x - 1$  è un divisore del polinomio  $x^3 - 3x^2 + kx - 3k$ . Allora  $k$  è uguale a

- A.**  $-3$
- B.**  $-1$
- C.**  $1$
- D.**  $5$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-11, E-12, E-13, E-14**

**Quesito 33**

L'equazione di secondo grado  $20x^2 + bx + c = 0$  ha due soluzioni:  $-\frac{3}{4}$  e  $\frac{2}{5}$ . Allora  $20x^2 + bx + c$  è uguale a (seleziona tutte le opzioni corrette)

- A.**  $(4x + 3) \cdot (5x - 2)$
- B.**  $(4x - 3) \cdot (5x + 2)$
- C.**  $20 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{5}\right)$
- D.**  $20 \cdot \left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{2}{5}\right)$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-12, E-9**

**Quesito 34**

Il quoziente della divisione tra i polinomi  $\sqrt{2}x^3 - x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$  e  $x - \sqrt{2}$  è uno dei seguenti polinomi. Quale?

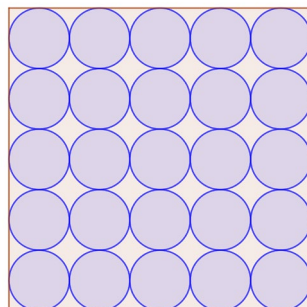
- A.**  $\sqrt{2}x^2 + x + 2$
- B.**  $\sqrt{2}x - x + 2$
- C.**  $2x^2 - x + \sqrt{2}$
- D.**  $2x^2 + x + \sqrt{2}$

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-13**

**Quesito 35**

In un quadrato di lato  $l$  sono inseriti  $n^2$  cerchi tutti uguali tra loro disposti come in figura. Esprimere, in funzione di  $l$  ed  $n$ , il rapporto tra la somma delle aree dei cerchi e l'area del quadrato.

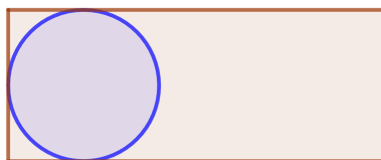


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-2, E-3**

**Quesito 36**

Una circonferenza è posta internamente a un rettangolo, ed è tangente a tre suoi lati come in figura. Indichiamo con  $a$  e  $b$  le lunghezze dei lati del rettangolo ( $b \geq a$ ). Se l'area del cerchio è uguale a metà dell'area del rettangolo, quanto vale il rapporto  $b/a$ ?

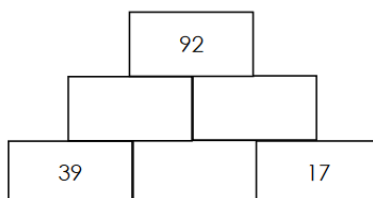


[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-2, E-3**

### **Quesito 37**

Una “piramide numerica” è uno schema composto da 6 caselle disposte come in figura, in cui in ogni casella deve essere inserito un numero. Una piramide è “ben costruita” se il numero contenuto in ciascuna casella dei livelli superiori è la somma dei numeri contenuti nelle due caselle del livello sottostante ad essa adiacente.



La figura mostra una piramide numerica parzialmente compilata. Quale numero deve essere inserito nella casella centrale più in basso affinché la piramide risulti ben costruita?

[Risposta esatta](#)

Abilità principali: **E-2, E-3, E-6**

**Risposte esatte**

| Quesito    | Risposta esatta                                                                              |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Quesito 1  | $\frac{a \cdot b}{(a - b)^2}$                                                                |
|            | 15/4                                                                                         |
| Quesito 2  | $(2n + 1) + (2n + 3)$                                                                        |
| Quesito 3  | $n^2 - (n - 1)^2$                                                                            |
|            | V, F, V, F                                                                                   |
| Quesito 4  | D                                                                                            |
| Quesito 5  | A                                                                                            |
|            | 0,5 m; 2,1 km/h                                                                              |
|            | Circa 8,57 km                                                                                |
| Quesito 6  | A                                                                                            |
| Quesito 7  | B                                                                                            |
| Quesito 8  | 1. $T = \left(\frac{v}{20,05}\right)^2 - 273,15$                                             |
|            | 2. C                                                                                         |
| Quesito 9  | Numeri che sono soluzione: -100, -20, -10,...<br>Numeri che non sono soluzione: 0, 1, 10,... |
| Quesito 10 | C                                                                                            |
| Quesito 11 | A                                                                                            |
| Quesito 12 | Le soluzioni dell'equazione sono $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$             |

|            |                                                                                             |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Quesito 13 | $x \neq 0$                                                                                  |
| Quesito 14 | L'insieme delle soluzioni della disequazione è $\{x \in \mathbb{R}: x < -1 \vee x \geq 1\}$ |
| Quesito 15 | D                                                                                           |
| Quesito 16 | D                                                                                           |
| Quesito 17 | Le soluzioni del sistema sono tutti i numeri maggiori di 5                                  |
| Quesito 18 | Il sistema ha un'unica soluzione: $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$                                    |
| Quesito 19 | A-5, B-4, C-1, D-6                                                                          |
| Quesito 20 | 5 esami                                                                                     |
| Quesito 21 | D                                                                                           |
| Quesito 22 | La soluzione del sistema è $\{4, -6\}$                                                      |
| Quesito 23 | Laura ha investito nei due titoli rispettivamente 9.000 euro e 6.000 euro                   |
| Quesito 24 | B                                                                                           |
| Quesito 25 | 3 soluzioni reali                                                                           |
| Quesito 26 | L'insieme delle soluzioni della disequazione è $] -2, -1[ \cup ] 1, +\infty[$               |
| Quesito 27 | D                                                                                           |
| Quesito 28 | E                                                                                           |
| Quesito 29 | $(x - 1)(x - 4) \leq 0$                                                                     |
| Quesito 30 | $0$ e $\sqrt{2}$                                                                            |
| Quesito 31 | D                                                                                           |

|            |                 |
|------------|-----------------|
| Quesito 32 | B               |
| Quesito 33 | A e D           |
| Quesito 34 | A               |
| Quesito 35 | $\frac{\pi}{4}$ |
| Quesito 36 | $\frac{\pi}{2}$ |
| Quesito 37 | 18              |