

NUCLEO TEMATICO 2: **PROBLEMI**

1. Premessa	1
2. Contesti specifici e aspetti generali del problem solving	2
3. Introduzione agli esempi di problemi	3
4. Fonti dei problemi	6
5. Esempi di problemi	7

1. PREMESSA

Risolvere problemi è un'attività che caratterizza il comportamento intelligente. Abbiamo un *problema* quando vogliamo ottenere un obiettivo in una situazione che almeno in parte è nuova e nella quale non sappiamo esattamente come agire - dobbiamo quindi trovare una strada, esplorando la situazione, analizzando le risorse disponibili, cercando ulteriori informazioni, prendendo decisioni e valutando il nostro progresso verso la meta. L'attività di risolvere problemi coinvolge un insieme di processi e si presenta in una varietà di modi che si raccolgono complessivamente sotto il nome di *problem solving*¹.

I problemi nascono continuamente nella vita quotidiana, nel lavoro e nelle professioni. Questo accade frequentemente nelle società sviluppate, anche in connessione con l'uso di conoscenze e abilità complesse, in particolare delle tecnologie digitali. Gli studenti a scuola e all'università si

¹ Il problem solving è un classico oggetto di studio della psicologia cognitiva, si veda ad esempio la raccolta *La soluzione di problemi*, a cura di G. Mosconi, V. D'Urso, Giunti-Barbèra 1973.

Una recente [2017] ampia discussione sul problem solving, ricca di dati e riferimenti ulteriori, si trova in

https://read.oecd-ilibrary.org/education/the-nature-of-problem-solving_9789264273955-en#page9,

mentre in

https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwihn9XKg-3rAhWhNOwKHTzAAMgQFjAKegQIAhAB&url=http%3A%2F%2Fwww.oecd.org%2Feducation%2Fschool%2Fprogramme-for-international-student-assessment-pisa%2F34009000.pdf&usg=AOvVaw3dvG9wArHb_GobamMjrZmN

si trova la presentazione della prima sperimentazione del test di problem solving PISA 2003.

Infine, un *corso introduttivo on line al problem solving*, per gli studenti, si trova in <https://ccmit.mit.edu/>

trovano frequentemente a dover risolvere problemi proposti dai docenti nell'ambito di ciascuna disciplina. Inoltre devono affrontare altri diversi tipi di situazioni che è corretto e opportuno considerare come dei problemi, anche se spesso non vengono chiamati così; ad esempio, *comprendere un argomento* che non è chiaro a lezione e sui testi, oppure *preparare e presentare un elaborato* sono problemi, per i quali si devono avere obiettivi precisi e che devono essere affrontati mediante opportune analisi e strategie.

2. CONTESTI SPECIFICI E ASPETTI GENERALI DEL PROBLEM SOLVING

Ogni problema si trova in un certo contesto ed è formulato con un certo linguaggio.

Il contesto può essere quello di una certa disciplina e in tal caso per comprendere il problema occorre conoscere concetti e termini specifici di tale disciplina, inoltre, la capacità di problem solving è strettamente legata alle conoscenze, competenze e tecniche specifiche che si hanno nella disciplina stessa. Ma anche se si possiedono le conoscenze necessarie rimane la difficoltà di riconoscere *quali* di esse sono pertinenti alla situazione che si sta considerando e *quali* possono essere utili per il problema che interessa; a questo fine è necessario avere esperienza e intuizione nel campo specifico. Per i problemi di questo tipo rimandiamo alle indicazioni che sono contenute nei Quadri di riferimento relativi alle diverse aree disciplinari² e ci limitiamo qui a sottolineare l'importanza che in ogni materia di studio si colgano tutte le occasioni per esercitarsi a risolvere problemi, poiché questo è utilissimo sia per mettere alla prova e consolidare le conoscenze acquisite, sia per sviluppare le capacità di problem solving. A questo riguardo osserviamo che ci sono problemi standard, per i quali esistono tecniche efficaci di soluzione che devono essere imparate e che occorre saper usare in modo rapido e sicuro. Per questa finalità è certamente utile esercitarsi ripetutamente su problemi tra loro simili, però bisogna anche evitare di eccedere nella ripetizione e occorre variare i problemi. In ogni disciplina e in ogni argomento si deve insomma cercare un opportuno bilanciamento tra gli *esercizi di routine* e i *problemi* che vengono proposti agli studenti.

D'altra parte, ci sono problemi che si trovano in contesti disciplinari elementari di conoscenza comune o in contesti ordinari della vita quotidiana, che richiedono un certo sforzo per essere affrontati e risolti: occorre **comprendere bene il testo**, analizzare la situazione e trovare opportune **rappresentazioni dei dati**; occorre **esplorare**, valutare e scegliere possibili azioni e **strategie** che portino a una soluzione, eventualmente attraverso un'opportuna **sistematica computazione**. È di questi problemi che ci occupiamo nel presente Quadro di riferimento. Una ragione per cui ci interessano è che permettono di esercitare il problem solving senza essere

² Ad esempio a questo link

<https://docs.google.com/document/d/1QvY5CEc0WKJAdSJymh8kin4rD8odNnxBfgRG9Tm10Q4/edit>

si trovano le indicazioni per la soluzione di problemi del Quadro di riferimento di area matematica

troppo assorbiti da difficoltà specifiche di una o di un'altra disciplina; un'altra ragione è che tra questi problemi si trovano dei casi particolarmente semplici di questioni computazionali di grande rilievo che si trovano sempre di più in ogni campo della ricerca scientifica, nei sistemi complessi e nelle organizzazioni. Esercitarsi nei processi mentali che sono richiesti da questi problemi è quindi anche una buona preparazione al pensiero computazionale e alle scienze dell'informazione, che si studiano, o si dovrebbero studiare, all'inizio di tutte le lauree.

Prima di passare ad una analisi dettagliata di alcuni esempi, osserviamo che per risolvere problemi è necessario avere atteggiamenti, convinzioni ed emozioni favorevoli. Ad esempio occorre che gli studenti imparino ad apprezzare il piacere intellettuale del problem solving e a controllare l'ansia che inevitabilmente si prova nelle situazioni nuove e incerte, così riusciranno meglio a insistere con pazienza nel lavoro che occorre per risolvere un problema anche se i primi sforzi dovessero risultare infruttuosi. A questi fini è utile che i docenti organizzino attività e discussioni di gruppo, lascino tempo per lavorare con calma, evitino di associare gli eventuali insuccessi nel problem solving a valutazioni scolastiche negative. Così gli studenti potranno sviluppare la capacità di affrontare un problema con la tranquillità emotiva, la fiducia e la determinazione necessarie, nonché la disponibilità e l'interesse di cercare da sé problemi da risolvere.

TRASFERIBILITÀ E TRASVERSALITÀ DELLE CAPACITÀ DI PROBLEM SOLVING

La capacità di risolvere problemi riguarda tutte le discipline e tutti gli aspetti della nostra vita; in questo senso è una competenza generale e *trasversale*; tuttavia, per ciascun diverso problema, essa è strettamente legata alle conoscenze specifiche, alle abilità operative e alle emozioni e convinzioni che ciascuno di noi ha nel contesto del problema stesso. Pertanto, non è detto che se una persona sa risolvere problemi di un certo tipo in un certo contesto, ad esempio in ingegneria, tale capacità si trasferisca *automaticamente* ad altri tipi di problemi o in altri contesti - con un po' di lavoro, in qualche misura, questo può accadere, ma non è detto che accada in generale. In conclusione, per sviluppare le competenze di problem solving occorre esercitarsi in molti contesti, anche assai diversi tra loro, e successivamente riflettere sulle analogie e le differenze tra i processi che si mettono in atto per risolvere problemi nei vari ambiti.

3. INTRODUZIONE AGLI ESEMPI DI PROBLEMI

In questa sezione presentiamo diversi esempi di problemi che riteniamo utili per gli studenti che desiderano prepararsi per l'ingresso all'università, per tutti i corsi di laurea e in particolare per i corsi di laurea scientifici e di ingegneria, o comunque che utilizzano strumenti quantitativi, statistici, informatici. Di ciascun problema daremo almeno una tra le possibili risoluzioni e discuteremo alcuni aspetti:

- il contesto, il linguaggio, le possibili difficoltà di comprensione del testo;

- le strategie che si possono adottare, i tipi di ragionamenti che occorre saper fare, le modalità di rappresentazione che possono essere utili;
- le abilità e le competenze che sono richieste, che sono utili per gli studi universitari e che si possono sviluppare esercitandosi nel tipo di problema considerato.

Inoltre, quando è possibile, indicheremo la fonte del quesito e se quesiti simili sono stati dati in passato in test d'ingresso all'università o di altro tipo, nonché i dati statistici disponibili sulle risposte degli studenti e il tipo di difficoltà che da questi dati si può inferire.

Ovviamente esistono problemi di tipi molto diversificati e non pensiamo certo che la nostra raccolta esaurisca tutte le possibilità. Ci auguriamo però che gli esempi dati aiutino a comprendere ciò che abbiamo scritto nei punti a, b, c di sopra e facciano vedere che tipo di riflessioni si possono fare intorno a uno specifico problema, per comprendere i nostri processi mentali e forse per imparare a risolvere altri problemi. Aggiungiamo che a nostro parere non è possibile dare una classificazione tassonomica di tutti i possibili problemi in categorie ben determinate e separate tra loro. Pensiamo però che sia utile provare ad assegnare a ogni problema delle “etichette” che ne indicano qualche proprietà.

CONTESTI

I contesti dei problemi che andiamo a considerare sono i più vari. Spesso sono situazioni di vita quotidiana, ma possono riguardare il funzionamento di qualche dispositivo, oppure possono riguardare numeri o parole, di solito intesi come semplici sequenze di caratteri e senza riferimento a proprietà aritmetiche o grammaticali.

COMPRENSIONE DEL TESTO, RUOLO DELLE ESEMPLIFICAZIONI

In ogni problema bisogna comprendere la situazione che viene descritta, le variabili in gioco, le relazioni fra queste variabili, i dati che vengono forniti e la domanda che viene fatta. In un quesito a risposta multipla occorre anche comprendere il testo delle opzioni di scelta. Tutto questo può presentarsi nelle forme più disparate.

I testi possono avere delle ambiguità, che possono essere intrinsecamente connesse all'uso del linguaggio naturale o possono essere volutamente incluse poiché si ritiene istruttivo per lo studente incontrarle; in ogni caso per lo studente deve essere possibile risolverle mediante un'attenta lettura e opportuni ragionamenti, utilizzando suggerimenti presenti nel testo. Un modo che viene usato per risolvere l'ambiguità di un testo che descrive in astratto un certo insieme di operazioni su certi dati è quello di utilizzare opportune esemplificazioni (si veda la discussione del problema “Codice cifrato”). Altri esempi di ambiguità sono quelli che discendono dagli usi comuni delle congiunzioni o della doppia negazione; per questi esempi facciamo riferimento al nucleo tematico *Logica, ragionamento e linguaggio naturale*. La risoluzione delle ambiguità prepara lo studente ad affrontare i problemi che si incontrano realmente nello studio e nel lavoro, che molto

spesso non sono affatto formulati in modo preciso. Naturalmente, nei problemi che si propongono agli studenti per prepararsi ci si può spingere di più nell'ambiguità, mentre nei quesiti che vengono proposti nelle prove di verifica o nei test si ritiene opportuno contenere l'ambiguità dei testi in modo che sia chiaramente possibile risolverla in breve tempo.

Può capitare che nella formulazione di un problema si usino termini elementari di qualche materia scolastica, ma si tratta in ogni caso di concetti che si studiano a cominciare dalla scuola primaria e secondaria di primo grado e che ci si attende siano ben consolidati al termine della scuola dell'obbligo a 15 anni; sono dunque da ritenersi conoscenze di fondo comuni.

STRATEGIE, RAPPRESENTAZIONI, RAGIONAMENTI

Ogni problema richiede una strategia. Qualche volta la strategia è molto semplice e quasi non ce ne accorgiamo, altre volte è importante esserne consapevoli ed esplicitarla. Naturalmente le strategie sono molto varie e non è pensabile cercare di descriverle tutte; mettiamo però in evidenza almeno quelle che si trovano negli esempi sottostanti, che sono di uso frequente.

Molti problemi riguardano una situazione nella quale gli stati possibili sono un insieme finito. Nei casi reali il numero degli stati può essere molto grande e per trattare questi problemi occorrono algoritmi, software e sistemi di calcolo. Si possono però considerare casi più semplici nei quali è possibile esercitare strategie che poi si estendono a situazioni generali. Un problema con un numero finito di stati è ad esempio il problema *"Sabati e domeniche"*. Nella soluzione e discussione di questo problema si vede come si possono rappresentare sistematicamente gli stati in modo da rendere più veloci e sicuri i ragionamenti che consentono di verificare quali stati sono compatibili o no con una informazione data. Un altro esempio è il problema *"Quanti sono"*, nel quale si chiede semplicemente di contare il numero di stati possibili per la situazione descritta; per contarli è utile avere una rappresentazione sistematica dell'insieme degli stati. Anche nel problema *"Resto"* c'è un insieme finito di stati che sono a priori possibili per le monete nella cassa. Il numero di questi stati non è così piccolo, ma traendo opportune conseguenze logiche delle informazioni date si riesce a ridurre via via le possibilità, fino ad arrivare all'unico stato compatibile con tali informazioni. In altre situazioni conviene esplorare l'insieme degli stati compiendo una sequenza di scelte alternative, che si può rappresentare con un grafo ad albero, come nell'esempio *"Codice binario"*.

Un altro tipo di strategia è la modellizzazione algebrica, che si trova discussa ad esempio nei problemi *"Prestazioni elevate"* e *"Numero cifre"*. Anche il problema *"Uovo di cioccolato"* si può risolvere con una modellizzazione algebrica, ma la soluzione proposta è in un certo senso più primitiva e utilizza una rappresentazione grafica nella quale l'oggetto "quadrato" ha il ruolo assegnato in algebra alla lettera. Problemi di questo tipo si possono considerare introduttivi al metodo della modellizzazione algebrica, che in tutti i corsi di laurea è molto importante padroneggiare, almeno in casi semplici. Per quanto la modellizzazione algebrica sia usata in modo elementare negli esempi che consideriamo, molti studenti che arrivano all'università non la fanno

usare in modo naturale e forse non hanno mai veramente riflettuto su come funziona; quindi questo tipo di problemi non si può considerare superfluo.

Ci sono inoltre problemi che richiedono di eseguire una sequenza di operazioni su un certo sistema, ad esempio “Codice cifrato” e “Codice binario”. Il primo passo da fare per risolverli è comprendere la descrizione delle operazioni, risolvendo eventuali ambiguità di linguaggio. Poi occorre fare le operazioni richieste. Se il quesito si ferma qui, lo si può quasi considerare una domanda di comprensione del testo, a meno che tale comprensione sia già di per sé così complessa da richiedere un ragionamento articolato. I problemi suddetti possono però diventare più interessanti e richiedere opportune strategie, se viene chiesta l’individuazione dello stato iniziale conoscendo quello finale o la determinazione di sequenze di operazioni che conducono da un certo stato a un altro.

Infine osserviamo che un problema si può presentare come quesito a risposta aperta o a scelta multipla. A seconda della forma possono essere utili strategie diverse, ugualmente importanti da conoscere. In alcuni degli esempi seguenti consideriamo entrambe le forme e facciamo qualche commento sulle differenze. In generale osserviamo qui che i quesiti a risposta aperta hanno per la formazione degli studenti il vantaggio di dare una maggiore possibilità di esplorare le situazioni e di richiedere una motivazione della risposta. D’altra parte, anche i quesiti a scelta multipla sono interessanti; infatti, oltre che essere comunemente utilizzati nei test, si presentano naturalmente nella vita quando occorre stabilire se una certa conseguenza è effettivamente possibile in certe condizioni. Per questo tipo di quesiti possono essere utili strategie che partono dall’esame delle opzioni di risposta e che fra queste opzioni portano a scartare quelle che sono più facilmente falsificabili mediante la verifica di qualche esempio.

4. FONTI DEI PROBLEMI

I problemi proposti in questa sezione sono presi da

Test di ingresso Con.Sienze - Piano nazionale Lauree Scientifiche (2008-2015)

- TIP Cisia
- TOLC Cisia
- Competizione internazionale Bebras

I quesiti presi dalla competizione internazionale Bebras sono soggetti al seguente copyright:

Copyright © Bebras – International Contest on Informatics and Computer Fluency. This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License (CC BY-NC-SA 3.0). Visit: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa-sa/3.0/>

5. ESEMPI DI PROBLEMI

Sabati e domeniche

Nel mese di gennaio di un certo anno ci furono 5 sabati e 4 domeniche.
Che giorno della settimana fu in quell'anno il 6 gennaio?

Soluzione. Ci sono sette risposte possibili. Nella formulazione del quesito è implicitamente inteso che l'informazione "nel mese di gennaio ci furono 5 sabati e 4 domeniche" consente di escludere sei delle sette possibilità.

Dal momento che i casi possibili sono pochi, un modo per trovare la risposta è di esaminarli tutti, uno a uno. Ad esempio, si può cominciare a guardare cosa succede se il 6 gennaio è un sabato; si vede che in tal caso anche il 13, 20, 27 sono sabati e non ce ne sono altri; dunque i sabati sono quattro in tutto, ma dovevano essere cinque; ne segue che il 6 gennaio non può essere un sabato. Poi si può continuare supponendo che il 6 gennaio sia domenica, poi lunedì e così via, fino a quando si trova il giorno della settimana che va bene.

Però, prima di esaminare tutti i casi si può cercare di capire meglio la situazione. Poiché 7 per 4 fa 28, si capisce che in un mese qualsiasi ci sono sempre quattro settimane intere e dunque ci sono sempre quattro domeniche e quattro sabati. Ma i sabati e le domeniche possono essere cinque, se capitano nei primi giorni (e quindi anche negli ultimi) del mese. Ad esempio, consideriamo il caso in cui il primo giorno di gennaio è un sabato. Per tenere sotto controllo la situazione con sicurezza può essere conveniente rappresentarla con uno schema grafico come si vede nella figura qui sotto.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
	S	D	L	Ma	Me	G	V	S	D	L	M	M	G	V	S	D	L	M	M	G	V	S	D	L	M	M	G	V	S	D	L	

Si vede così che i giorni 1, 8, 25, 22 e 29 sono sabati, come richiesto, e inoltre si vede che i giorni 2, 9, 16, 23, 30 sono domeniche; dunque in tal caso le domeniche sono cinque e questo contraddice l'informazione data nella domanda. Pertanto il primo giorno di gennaio non può essere un sabato.

Avendo a disposizione lo schema precedente si vede subito (nella figura sotto, terza riga dall'alto) cosa accade se è il secondo giorno di gennaio a cadere di sabato: anche in questo caso nel mese ci sono 5 domeniche e quindi è da escludere. In modo analogo (quarta riga) si vede poi che se è il terzo giorno di gennaio a cadere di sabato, allora nel mese ci sono 5 sabati ed esattamente 4 domeniche, che è ciò che si vuole.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
	S	D	L	Ma	Me	G	V	S	D	L	M	M	G	V	S	D	L	M	M	G	V	S	D	L	M	M	G	V	S	D	L	
	V	S	D	L	Ma	Me	G	V	S	D							D						S	D						S	D	
	G	V	S	D		Ma	Me			S	D						S	D						S	D						S	

Infine, usando lo stesso schema, si vede istantaneamente che se sabato cade nei giorni 4, 5, 6 e 7, allora il mese di gennaio ha solo 4 sabati. In conclusione, l'unico caso compatibile con le informazioni date è quello in cui il 3 gennaio è sabato e di conseguenza la risposta al quesito è che il 6 gennaio è martedì.

Discussione. Per rispondere al quesito non occorrono conoscenze specifiche, ma soltanto conoscenze comuni condivise. Questo consente di concentrarsi sulle modalità del ragionamento con cui si arriva alla risposta, senza essere distratti da difficoltà di contenuto disciplinare o di contesto.

Il problema considerato riguarda una situazione che si può presentare in sette casi possibili: i sette giorni della settimana in cui cade il 6 gennaio. Ciascuno di questi casi si può considerare come uno "stato" della situazione e si può dire che la situazione ha sette stati.

Il primo metodo proposto per risolvere il problema, ossia esaminare tutte le possibilità una a una, si chiama "ricerca esaustiva" o "di forza bruta". In questo caso è una strategia accettabile, poiché gli stati possibili sono pochi, ma in generale tale metodo può risultare troppo lento e costoso. Prima di usare la forza bruta, vale la pena di dedicare un po' di tempo per capire la struttura del problema e vedere se, con qualche ragionamento, si può ridurre il numero dei casi che è necessario esaminare. Questo è proprio ciò che si è fatto nella seconda parte della soluzione data, dove, per indirizzare la ricerca di una rappresentazione comoda degli stati del problema e per esaminarli, si sono utilizzate opportune deduzioni logiche come *"il mese di gennaio ha 31 giorni, quindi ha in ogni caso almeno 4 sabati"* e *"se il primo del mese è di sabato, allora gennaio ha 5 sabati e ha anche cinque domeniche"*. Ciascuna di tali deduzioni è del tutto elementare, ma può essere difficile farsi venire in mente quali sono quelle che sono utili e come si possono concatenare in modo da ottenere un ragionamento che risolva il problema. In effetti il processo con cui per la prima volta si arriva a trovare una soluzione può essere tortuoso e guidato contemporaneamente da deduzioni e intuizioni, analogie, rappresentazioni e analisi di casi particolari. Alla fine, però è necessario produrre un'argomentazione chiara che porta dalle premesse alla conclusione attraverso una catena di deduzioni.

Semplici problemi di questo tipo possono essere utili per sviluppare la capacità di comprendere e produrre una argomentazione, nonché di comunicarla. Infatti, per molti studenti, anche se hanno risposto correttamente al quesito, potrà essere utile esercitarsi a leggere e a comprendere una

soluzione scritta, ad esempio quella che abbiamo proposto, ma anche quelle dei compagni; oppure esercitarsi a scrivere il loro ragionamento e a spiegarlo a un compagno.

Anche se utilizzare una rappresentazione grafica può non essere necessario, spesso è utile per aiutare la memoria di lavoro a tenere in mente il quadro della situazione e per avere maggiore sicurezza e rapidità nei ragionamenti. Troppo spesso gli studenti non sono abituati a cercare questo tipo di rappresentazioni e occorre invece che diventino consapevoli della loro utilità e che ciascuno si eserciti a produrre quelle che sono utili per il proprio modo di pensare. Gli schemi grafici possono diventare rapidamente inadeguati quando i problemi diventano più complessi e il numero degli stati aumenta. In tal caso può essere utile cominciare da una rappresentazione grafica di un problema semplificato, per poi trovare delle rappresentazioni più generali in grado di riassumere i dati rilevanti per il problema in oggetto. I due passaggi appena descritti sono componenti fondamentali nella modellizzazione astratta dei dati tramite opportuni schemi e strutture, una capacità fondamentale ad esempio nell'informatica ma importante per tutte le discipline.

Il quesito compare, come domanda a scelta multipla, in un esempio di prova TOLC-S pubblicato sul sito CISIAonline:

Nel mese di gennaio di un certo anno ci furono 5 sabati e 4 domeniche.

Che giorno della settimana fu in quell'anno il 6 gennaio?

- A. LUNEDÌ
- B. MARTEDÌ
- C. MERCOLEDÌ
- D. SABATO
- E. DOMENICA

In questa forma del quesito i casi che occorre verificare sono soltanto i cinque proposti nelle opzioni di scelta. Riteniamo che per esercitare gli studenti nel problem solving sia preferibile la formulazione del quesito a risposta aperta.

Per quanto semplici possano sembrare le domande di questo tipo, nei test TOLC-S la percentuale degli studenti che risponde correttamente non supera il 50%. Bisogna però ricordare che nei test TOLC il tempo a disposizione è poco, le risposte errate sono penalizzate e ci può essere un po' di ansia. Si può quindi ritenere che molti più studenti sarebbero in grado di rispondere, avendo tempo e in una situazione più rilassata.

Etichette. Problemi che hanno un numero finito di stati. Metodo di forza bruta. Rappresentazioni schematiche e grafiche di una situazione. Deduzioni logiche e ragionamento.

Prestazioni elevate

In modalità “prestazioni elevate”, il consumo di energia di un computer portatile aumenta del 25% rispetto all’utilizzo normale. Di quanto diminuisce la durata della batteria nell’utilizzo “prestazioni elevate” rispetto all’utilizzo normale?

Soluzione. Il consumo è il rapporto³ fra l’energia consumata e il tempo impiegato per consumarla. Questo si può esprimere con la formula

$$C = E/D$$

dove E è l’energia contenuta nella batteria a piena carica e D è la durata della batteria in modalità normale. Analogamente si ha

$$C^* = E/D^*$$

dove C* e D* sono il consumo e la durata della batteria in modalità prestazioni elevate.

A questo punto usiamo l’informazione che ci dà il problema, ossia che il consumo C* in modalità prestazioni elevate è del 25% superiore al consumo normale C. Questo fatto si scrive come segue

$$C^* = C + 0,25C = (1 + 0,25)C = 1,25C.$$

Ora basta utilizzare le tre relazioni scritte per trovare la risposta. Precisamente, nell’ultima relazione al posto di C e C* si sostituiscono le loro espressioni trovate precedentemente. In questo modo si ottiene

$$E/D^* = 1,25 E/D$$

da cui, dividendo per E da entrambe le parti e ricavando D* si ha:

$$D^* = E/1,25 = 0,8E = E - 0,20E$$

In conclusione, la durata della batteria in modalità prestazioni elevate è inferiore del 20% rispetto alla durata in modalità normale.

Discussione. Occorre comprendere che l’uso del termine “consumo di energia” sottintende che, fissata una determinata condizione di funzionamento (ad esempio, la modalità “prestazioni elevate”), per qualsiasi intervallo di tempo, il rapporto fra la quantità di energia consumata dal computer nell’intervallo e la durata dell’intervallo stesso non dipende dall’intervallo. Questo rapporto costante si chiama “consumo di energia” nella modalità di funzionamento fissata. In

³ Dovremmo dire più precisamente che è il rapporto fra la *misura* dell’energia e la *misura* del tempo, ma il modo di parlare utilizzato è più breve e comunque è sufficientemente chiaro.

particolare, il consumo è anche il rapporto fra l'energia contenuta nella batteria a piena carica e la durata della batteria stessa nella modalità di funzionamento data. Questo concetto di "consumo di energia" non è specifico di qualche disciplina, ma è di uso comune. Tale concetto è simile a molti altri rapporti fra grandezze, come "consumo di benzina" di un'automobile, "velocità" di un oggetto in moto uniforme o "ritmo di produzione" di un macchinario o di una fabbrica, che sono pure da considerare di uso comune. Problemi del tutto simili a quello considerato si possono infatti porre in tutti questi contesti e in molti altri.

Il problema si risolve traducendo le informazioni note in relazioni algebriche e poi facendo calcoli algebrici che trasformano tali relazioni in modo da ottenere una formula che esprime la risposta cercata; infine si traduce questa formula nel linguaggio ordinario. Questa strategia si chiama "modellizzazione algebrica". Per quanto riguarda la traduzione dal linguaggio all'algebra, nel problema in questione occorre usare il fatto che un aumento percentuale del 25%, corrisponde a moltiplicare per il numero 1,25 e che una moltiplicazione per 0,8 corrisponde a una diminuzione percentuale del 20%. Questo fatto, che può sembrare elementare, non è padroneggiato con sicurezza da molti studenti che entrano all'università e ciò comporta sistematiche difficoltà a modellizzare le percentuali. Per quanto riguarda i calcoli algebrici, occorre sostituire dei simboli che compaiono in una formula con espressioni equivalenti e trasformare poi una semplice equazione. Le abilità necessarie per fare questi calcoli sono al livello del primo anno di scuola superiore e quindi si devono ritenere conoscenza comune. La scelta dei calcoli da fare può essere invece meno ovvia, ma certamente deve essere alla portata di uno studente che entra all'università. Un modo alternativo per affrontare il problema è quello di utilizzare una proporzione. Fermo restando che ciascuno per risolvere i problemi usa i modi che trova migliori per sé, riteniamo che il nostro procedimento sia più generale e sia migliore per illustrare la modellizzazione algebrica.

Nei problemi di modellizzazione algebrica, le difficoltà si possono incontrare nella comprensione del contesto e dei contenuti disciplinari, nella traduzione in formule delle relazioni fra le grandezze considerate e nei calcoli algebrici. I problemi che sono in contesti elementari e che presentano modeste difficoltà di calcolo, come quello che stiamo considerando, si possono incontrare in situazioni di lavoro o di vita quotidiana e soprattutto sono una preparazione per problemi più complessi e con contenuti specifici rilevanti, che si trovano in molti corsi di laurea, non solo di carattere scientifico. Per questa ragione è utile prepararsi affrontando problemi di questo tipo.

Il quesito compare come domanda a scelta multipla in un esempio di prova TOLC-S pubblicato sul sito CISIAonline ed è stato dato nel test nazionale per l'ingresso ai corsi di laurea di area biologica realizzato nel 2011 da ConScienze, CBUI e Piano nazionale Lauree Scientifiche:

In modalità "prestazioni elevate", il consumo di energia di un computer portatile aumenta del 25% rispetto all'utilizzo normale. Di quanto diminuisce la durata della batteria nell'utilizzo "prestazioni elevate" rispetto all'utilizzo normale?

- A. 33%
- B. 40
- C. 25%
- D. 20%
- E. 30%

Come preparazione per l'università sono utili sia il quesito in forma aperta sia il quesito a scelta multipla. In quest'ultimo molti studenti sono attratti dalla risposta C. Ad esempio, nel già citato test nazionale del 2011 il 73% dei circa 7000 studenti che hanno sostenuto la prova ha dato la risposta C e meno del 7% ha dato la risposta corretta⁴. Si ritiene che per gli studenti sarebbe molto utile un'accurata analisi delle ragioni psicologiche di tale attrazione, che hanno a che fare con la diffusa misconcezione che l'aumento e la diminuzione percentuale siano operazioni additive, quando invece sono operatori di moltiplicazione. Si osserva spesso che questa misconcezione porta le persone a interpretazioni errate di dati e ad aspettative non fondate, quindi la si dovrebbe combattere maggiormente.

Etichette: modellizzazione algebrica.

⁴ A questo proposito si deve tenere presente che in quella prova la risposta sbagliata non era penalizzata.

Quanti sono?

Quanti numeri dispari di quattro cifre si possono scrivere usando una e una sola volta ciascuna delle cifre 2; 3; 7; 8?

Soluzione. Un numero è dispari se la sua cifra delle unità è dispari, quindi nel nostro caso tale cifra deve essere 3 oppure 7. Se l'ultima cifra è fissata, ad esempio è 3, le altre tre cifre, che sono 2, 7, 8, devono essere usate tutte e una sola volta, e dunque si possono mettere in un ordine qualunque. Per contare i modi in cui si possono ordinare queste tre cifre possiamo ad esempio ragionare così:

- la prima si può scegliere in tre modi diversi;
- una volta scelta la prima, le due rimaste si possono ordinare in due modi diversi;
- si hanno dunque $3 \times 2 = 6$ ordinamenti possibili delle cifre 2, 7, 8, che elenchiamo di seguito

2 7 8 , 2 8 7; 7 2 8 , 7 8 2; 8 2 7 , 8 7 2.

Per ciascuna di queste disposizioni delle cifre, aggiungendo la cifra 3 in fondo a destra si ottiene un numero dispari che contiene una e una sola volta le quattro cifre assegnate nel problema, come richiesto. Con un ragionamento analogo si ottengono sei numeri dispari che finiscono a destra con la cifra 7. Pertanto i numeri cercati sono in tutto $6 + 6 = 12$.

Discussione. Il contesto del problema è del tutto elementare. Si parla di numeri interi positivi, ma l'unica cosa che occorre sapere di aritmetica è che un numero dispari finisce con una cifra dispari, e questo si deve ritenere una conoscenza comune. Un problema del tutto equivalente è chiedere di usare le lettere ABCE per formare delle parole che finiscono con una vocale.

Il problema richiede di contare gli elementi di un insieme di oggetti e si può quindi considerare un problema elementare di combinatoria, ma per risolverlo non occorre alcuna conoscenza di calcolo combinatorio. Infatti è sufficiente trovare un modo per elencare ordinatamente gli oggetti dell'insieme. Nella soluzione ne abbiamo proposto uno, ma si potrebbero usare schemi grafici di vario tipo, ad esempio ad albero.

Questo tipo di problemi è utile per stimolare gli studenti a cercare delle rappresentazioni efficienti di un insieme di oggetti, che consentano di percorrere ordinatamente l'insieme, ad esempio per contarne gli elementi oppure per fare su ciascun elemento determinate operazioni. Questa capacità è utile come fondamento per ogni successivo studio della combinatoria e del calcolo delle probabilità ed è inoltre utile in diverse questioni che si incontrano nell'informatica, che richiedono di elencare sistematicamente un insieme di possibilità. Può essere utile suggerire agli studenti di

pensare da sé a problemi via via più complessi ed estendere le soluzioni già trovate nei casi più semplici. Ad esempio:

- *Quanti sono i numeri dispari di cinque cifre che si possono comporre usando una e una sola volta le cifre 1, 2, 3, 4, 5?*
- In quanti modi diversi si possono sedere 4 persone in una fila di 7 posti?

In questo modo si incontrano questioni più astratte, come: *in quanti modi si possono ordinare n oggetti?* Per uno studente che entra all'università, in particolare in un corso di laurea scientifico o dell'ingegneria, o comunque che utilizza elementi di statistica, è bene avere qualche volta pensato a questo problema. Non si ritiene invece necessario che ricordi la formula $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ che fornisce la risposta, né il simbolo $n!$

Il quesito è stato dato come domanda a scelta multipla nel test nazionale di selezione per i corsi di laurea di area biologica, realizzato nel 2014 da Con.Scienze, CBUI e Piano nazionale Lauree Scientifiche:

Quanti numeri dispari di quattro cifre si possono scrivere usando una e una sola volta ciascuna delle cifre 2; 3; 7; 8?

- A. 12
- B. 8
- C. 9
- D. 6
- E. 18

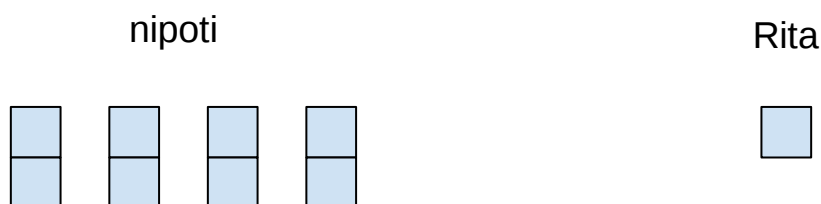
Il 50% degli studenti ha risposto correttamente, il 25% non ha dato risposte, i rimanenti studenti hanno scelto le opzioni B, D, E in ordine decrescente di preferenza.

Dividere un uovo di cioccolato

Rita ha vinto un grande uovo di cioccolata, lo spezzetta e prepara 4 mucchietti uguali di cioccolata per i nipoti, più un mucchietto che tiene per sé, che pesa la metà di ciascuno degli altri. I 4 nipoti arrivano con un amico, così Rita prende un po' di cioccolata da ciascuno dei 4 mucchietti e ne forma un altro, in modo che vi siano 5 mucchietti uguali.

Qual è il rapporto tra il peso del mucchietto che Rita ha tenuto per sé e quello di uno degli altri 5 mucchietti?

Soluzione. La prima parte del testo del problema dice che l'uovo di cioccolato è stato diviso in cinque parti. Quattro parti sono dei nipoti e sono uguali tra loro. La quinta parte è di Rita ed è la metà di ciascuna delle quattro dei nipoti. Facciamo un disegno schematico per rappresentare la situazione:



Dal disegno appare chiaramente che tutto il cioccolato si può pensare diviso in 9 parti uguali, ciascuna uguale a quella di Rita, e ogni nipote ha due di tali parti. Quindi i nipoti hanno complessivamente 8 parti su 9, ossia gli $8/9$ del cioccolato; invece, Rita ha $1/9$ del cioccolato.

Poi arriva un altro bambino e il cioccolato dei quattro nipoti viene diviso in cinque parti uguali.

Ciascuna di queste, dunque, è uguale a un quinto di $8/9$, ossia $\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{45}$ dell'intero uovo.

Infine, il problema chiede di trovare il rapporto fra la quantità di cioccolato che ha Rita e la quantità che ha alla fine ogni bambino. Tale rapporto è:

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{45}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{45}{8} = \frac{5}{8}$$

Per confermare la correttezza del calcolo appena fatto si può vedere cosa succede prendendo un caso particolare. Ad esempio, si può pensare che la parte di Rita sia 100 grammi; in tal caso ogni nipote ha 200 grammi e i quattro nipoti hanno complessivamente 800 grammi, che diviso per 5 fa 160 grammi. Il rapporto cercato è allora $100/160$ ossia $5/8$. In effetti si può anche ottenere il risultato lavorando direttamente su un caso particolare, ma occorre un po' di attenzione. Infatti, se come caso particolare si sceglie 1 kg o 1000 grammi come peso di tutto l'uovo, allora i calcoli

diventano scomodi e tutto sommato è meglio un approccio in cui si capisce che l'approccio sostanzialmente più comodo è prendere la parte di Rita come unità elementare.

Discussione. Diciamo subito che il problema risulta difficile per molti studenti. In forma di domanda a scelta multipla è stato dato nel test nazionale di selezione per i corsi di laurea di area biologica, realizzato nel 2014 da Con.Scienze, CBUI e Piano nazionale Lauree Scientifiche e gli studenti che hanno risposto correttamente sono stati il 28%, mentre gli studenti che hanno scelto di non rispondere sono stati il 45% (bisogna tenere conto che le risposte sbagliate erano penalizzate). Non è stata fatta un'indagine scientifica sui processi mentali degli studenti, ma si ritiene probabile che il problema appaia intricato e che la sua lettura e comprensione in sede di test richiedano troppo tempo agli studenti, i quali quindi desistono e si dedicano ad altri quesiti. È possibile che molti più studenti siano in grado di risolvere il problema, se hanno più tempo a disposizione e sono in una situazione più rilassata. D'altra parte il problema è elementare e richiede al più qualche calcolo con le frazioni, che si apprende nella scuola media e che deve essere padroneggiato entro la scuola dell'obbligo. Un problema così dovrebbe essere risolubile con sicurezza in brevissimo tempo. Perché ciò non accade? Dove sta la difficoltà?

Riteniamo che la difficoltà sia dovuta al fatto che il testo del problema, anche se è semplice, non sta tutto subito in memoria mentre lo si legge. Si capisce ciascuno dei due periodi in cui è articolato il testo, ma non rimane in mente un'idea chiara di cosa succede complessivamente. Non è niente di grave, basta aiutarsi con qualche strategia che consenta di integrare tutte le informazioni. Nella soluzione che abbiamo dato si è usato uno schema grafico per sintetizzare l'informazione contenuta nel primo periodo e trovare la ripartizione $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{9}$ tra la parte dei nipoti e la parte di Rita. Si poteva anche usare un modello algebrico e dire: chiamiamo R la quantità di cioccolato che sta nella parte di Rita; allora ogni nipote ha una quantità $2R$ di cioccolato, e i quattro nipoti insieme hanno $8R$ cioccolato... e continuare opportunamente. Oppure ancora si può provare a considerare un caso particolare, come indicato nella parte finale della soluzione proposta. In ogni caso il punto è che, se un problema fornisce dati e informazioni che non si riesce a tenere bene in mente tutti insieme, perché sono troppi o sono intrecciati, si prova a fare qualche schema grafico o algebrico per rappresentare la situazione e un po' alla volta si riesce a dipanarla. Questo atteggiamento di fronte ai problemi non è abbastanza comune negli studenti e invece deve essere sviluppato, perché è molto utile in tutte le discipline. Per cominciare a esercitarsi possono essere utili problemi come questo, dove non ci sono difficoltà dovute al contesto.

Resto

Franco il tabaccaio ha in cassa 195 euro e non ha monete. Un cliente gli chiede se ha da cambiare 10, 20, 50 o 100 euro, ma Franco risponde a malincuore di no a tutte le richieste. Quanti pezzi da 20 ha in cassa Franco?

- A. 1
- B. 4
- C. 3
- D. 2
- E. 0

Soluzione: Questo tipo di problemi richiede una serie di deduzioni logiche a partire dai dati del problema, che conducono all'unica soluzione possibile. Il fatto che Franco non abbia il resto per banconote da 10, 20, 50 e 100 euro permette di trarre le seguenti conseguenze:

Franco non può avere 2 o più banconote da 5, perché allora potrebbe cambiare 10 euro in due banconote da 5. Quindi Franco ha 0 o 1 banconote da 5.

Franco non può avere 2 o più banconote da 10, perché altrimenti potrebbe cambiare 20 euro in due banconote da 10. Quindi Franco ha 0 o 1 banconote da 10.

Franco non può avere 5 o più banconote da 20, perché altrimenti potrebbe cambiare 100 euro in 5 banconote da 20. Quindi Franco ha da 0 a 4 banconote da 20.

Franco non può avere 2 o più banconote da 50, perché altrimenti potrebbe cambiare 100 euro in due banconote da 50. Quindi Franco ha 0 o 1 banconote da 50.

Se Franco ha 1 banconota da 10, allora non può avere 2 o più banconote da 20, altrimenti potrebbe cambiare una banconota da 50.

Queste condizioni si possono riassumere tramite questa tabella:

Banconota	Numero
5	≤ 1

10	≤ 1
20	≤ 4 se non ha banconote da 10, altrimenti ≤ 1
50	≤ 1
100	?

A questo punto, si ragiona a partire dalla somma 195.

Dobbiamo arrivare a 195, quindi una banconota da 5 ci dovrà essere.

Se non avessimo a disposizione banconote da 100, considerati i vincoli potremmo ottenere le seguenti somme massime:

- $5 + 10 + 20 + 50 = 85$
- $5 + 20 + 20 + 20 + 20 + 50 = 135$
- È quindi necessario che ci sia una banconota da 100.
- A questo punto, fissate le banconote da 5 e da 100, c'è un unico modo per ottenere 195:

$$5 + 20 + 20 + 50 + 100$$

- La soluzione alternativa $5 + 10 + 20 + 20 + 20 + 20 + 100$ non è valida, perché non rispetta l'ultimo vincolo.

La risposta esatta è quindi **D**.

Discussione. Il quesito è in un contesto quotidiano e richiede conoscenze del tutto elementari. Per rispondere occorre ragionare sulle informazioni date nella domanda e trasformare ognuna di esse in vincoli sui numeri di banconote che possono trovarsi in cassa. Occorre poi rendersi conto che necessariamente l'insieme dei vincoli deve lasciare una sola possibilità per i numeri di banconote che possono trovarsi in cassa, escludendo tutte le risposte ad eccezione di una. Questo si può fare discutendo un certo numero, piccolo, di casi.

Il problema è facile, ma può richiedere un certo tempo, perché non è detto che la strategia efficace sia trovata subito. Può capitare che si perda un po' di tempo nel fare tentativi che non sono utili, ma a un certo punto si comincia a capire come procedere.

Come già avvenuto per il problema “Dividere un uovo di cioccolato”, il testo è molto semplice e ogni singola frase può essere compresa senza problemi. Ciononostante, è necessario affrontare il problema utilizzando carta e penna, perché ogni affermazione ha diverse conseguenze ed è impossibile ricordarle tutte. Cogliamo l’occasione per segnalare l’importanza che ha la memoria, di diversi tipi, per lo svolgimento dei processi mentali di soluzione dei problemi. Non vogliamo qui approfondire la questione, che richiederebbe un certo spazio, e ci limitiamo a sottolineare l’importanza di utilizzare opportuni schemi grafici per aiutare la mente ad avere presenti i dati, le proposizioni e le implicazioni che descrivono il problema, nonché a gestire le loro trasformazioni, che portano a trovare la soluzione. Osserviamo che nella nostra soluzione abbiamo espresso i vincoli come un insieme di disequazioni, ma visto che in questo caso i valori possibili sono pochi, si possono semplicemente elencare tali valori.

Il quesito è presente nell’esempio di prova TOLC-I che si trova sul sito CISIAonline
<https://drive.google.com/file/d/1XwTw6zCZnE8bJ9ToAn91--0SIKrifjIZ/view>

Etichette: Deduzioni logiche e ragionamento.

Timbrature

Disponete di quattro timbri: uno da 16 stelle, uno da 4 stelle, uno da 2 stelle, e uno da 1 stella. Qual è il numero minimo di timbrate necessarie per ottenere esattamente 83 stelle?

- A. 5
- B. 6
- C. 7
- D. 8
- E. 9

Soluzione: Una possibile strategia per affrontare il problema è la seguente: si sceglie il timbro più grande possibile, e lo si utilizza ripetutamente fino a quando utilizzarlo ancora una volta porterebbe ad un numero di stelle eccessivo. In questo caso, si utilizza il timbro da 16 stelle 5 volte, fino ad ottenere 80 timbrate. Utilizzare nuovamente il timbro da 16 stelle porterebbe a 96 timbrate, troppe. Si passa quindi ai timbri successivi, applicando lo stesso criterio. Si scopre quindi che il timbro successivo (4 stelle) deve essere scartato, altrimenti il totale arriverebbe a 84 stelle, troppe. Si passa quindi al timbro con 2 stelle, portando il totale a 82. Infine, si utilizza il timbro da 1 stella, portando il totale ad 83.

Il numero di timbrature effettuate è quindi 7: 5 volte da 16, 1 volta da 2, 1 volta da 1.

Tuttavia, è necessario fare attenzione, in quanto questa strategia non sempre porta al successo. Nei quesiti CISIA, esistono problemi simili, con formulazioni diverse e numeri diversi. In alcuni casi, una particolare scelta di numeri può far fallire la strategia appena individuata. Ad esempio, si consideri un quesito con timbri da 12, 8, 1 stelle, in cui il numero da ottenere è 17. L'approccio appena visto utilizza 6 timbrate ($1 \cdot 12 + 5 \cdot 1$), mentre è possibile risolvere il problema con 3 timbrate ($2 \cdot 8 + 1 \cdot 1$).

Discussione: La parola "timbrata" può risultare di non immediata comprensione. Potrebbe essere opportuno aggiungere un esempio: "Ad esempio, è possibile ottenere 17 stelle con due timbrate, una da 16 e una da 1".

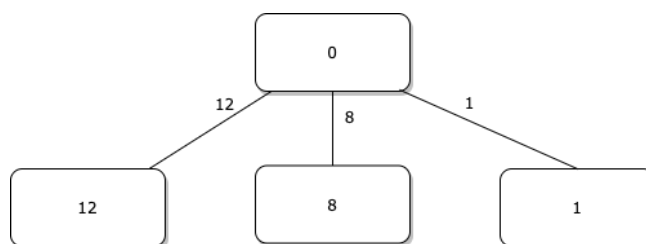
Il quesito propone un problema di *ottimizzazione*; si richiede allo studente di identificare una strategia per esplorare l'intero spazio delle soluzioni ammissibili (l'insieme di modi per ottenere 83 stelle) e identificare rapidamente fra esse la soluzione migliore rispetto ad un dato criterio, in questo caso: il numero minimo di timbrate. Nel caso di numeri da ottenere grandi e timbri piccoli, il numero di modi possibili può essere molto elevato.

La strategia proposta viene detta *greedy* (ingorda). L'approccio *greedy* richiede di individuare un criterio di ordine fra tutte le scelte possibili (in questo caso, considerare i timbri in ordine decrescente di dimensione) e utilizzare questo criterio per vincolare le scelte successive.

Esistono diverse classi di problemi che possono essere risolti con questo approccio, ma esistono tante classi di problemi in cui questa strategia funziona in alcuni casi, ma non è sempre in grado di individuare la soluzione ottimale. Il motivo è che spesso quella che sembra una scelta ottimale (selezionare il timbro più grande) può risultare controproducente in alcuni casi particolari.

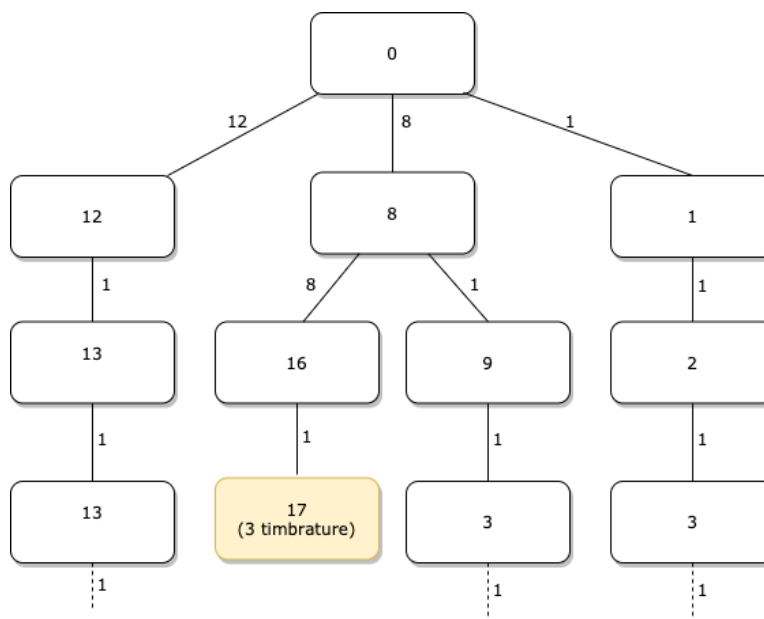
In assenza di informazioni certe sul fatto che il primo approccio funzioni, la tecnica da utilizzare è quella di esplorare tutto lo spazio delle scelte possibili. Un modo per schematizzare l'insieme di scelte e lo stato che si raggiunge dopo ogni scelta è quello di utilizzare un *albero*.

Facendo riferimento al secondo esempio, partiamo dalla situazione iniziale, in cui non ho ancora effettuato alcuna timbratura. Questa situazione viene rappresentata da un elemento con valore 0 (il valore ottenuto finora). A questo punto ci sono tre possibilità: iniziamo utilizzando un timbro da 12, uno da 8 oppure da 1. Questo viene rappresentato da tre elementi dell'albero, che contengono il valore ottenuto finora.



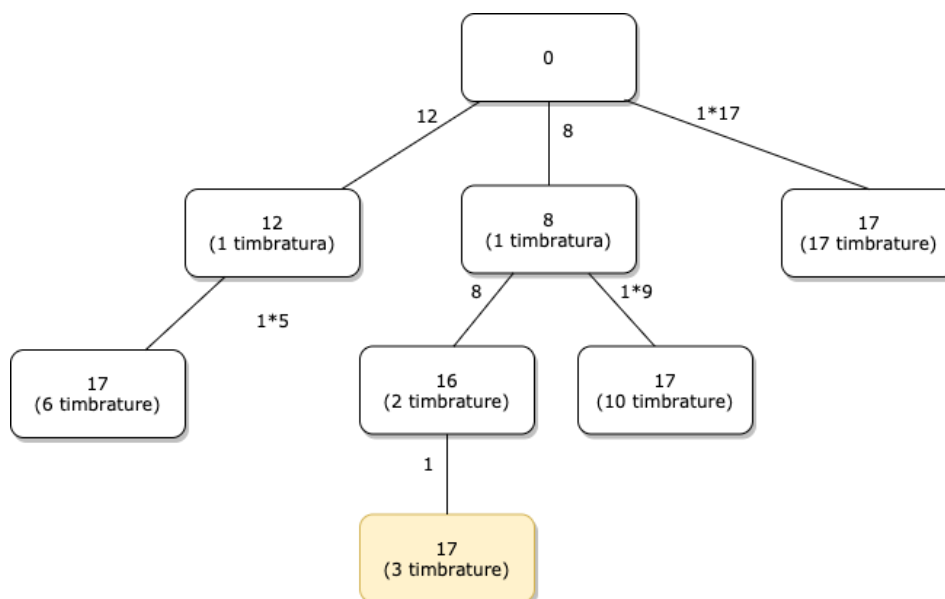
A questo punto, si potrebbe essere già spaventati dalla possibile crescita dell'albero. Ad ogni livello ci sono tre possibilità. È possibile notare tuttavia che è possibile ridurre la dimensione considerando il fatto che fare prima una timbratura da 1 e poi una da 8 è equivalente a farne prima una da 8 e poi da una da 1. Per evitare di esplorare tutte le permutazioni delle timbrature, possiamo decidere che dopo una timbratura con n stelle, potremo fare solo timbrature con un numero di stelle minore o uguale a n . In questo modo, si forza un'unica permutazione possibile, quella in cui timbri vengono applicati in ordine decrescente.

Questo approccio conduce a questo schema:



Facendo crescere l'albero per livelli, è possibile fermarsi non appena troviamo il primo valore 17, contando il numero di timbrature necessarie (3).

Volendo, è possibile anche pensare ad uno schema più compatto, che eviti di considerare tutte le timbrature di valore 1 come una lunga sequenza di scelte 1, ma che le riassume all'interno dell'albero stesso. Il risultato è equivalente.



Il concetto di approccio *greedy* non è certo un bagaglio comune fra gli studenti delle superiori, e non è necessario che lo sia. Tuttavia, questa tipologia di quesiti dovrebbe stimolare un ragionamento sulla soluzione dei problemi di livello più astratto: una volta che ho individuato una strategia, come posso assicurarmi che la strategia individuata sia quella corretta?

Questo aspetto è particolarmente importante in un problema di ottimizzazione. Infatti, mentre in tanti problemi è possibile fare una verifica a posteriori della risposta data seguendo un ragionamento logico o esplorando uno spazio di possibilità, nel caso di un problema di ottimizzazione dobbiamo assicurarci che non esistano soluzioni alternative migliori (in questo caso, più piccole). Nel costruire lo schema proposto, ci siamo assicurati di esplorare lo spazio delle soluzioni dalle più piccole alle più grandi; è stato così possibile interrompere l'esplorazione non appena una soluzione è stata trovata.

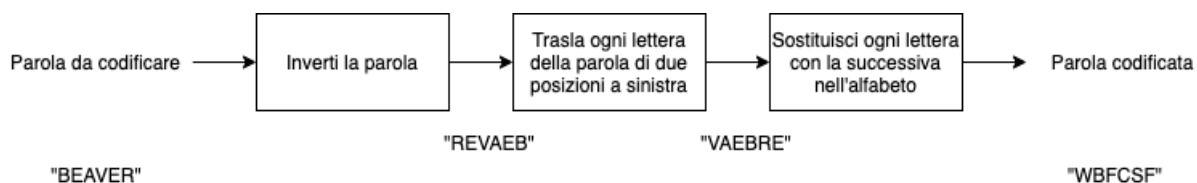
Questo tipo di problemi è particolarmente rilevante per la formazione universitaria. Non si chiede semplicemente di risolvere un problema, ma di riflettere sulla propria strategia di soluzione e riconoscere l'esistenza di diversi possibili approcci alla soluzione, diversi per complessità e tempo richiesto.

Parallelamente, è possibile notare che le schematizzazioni proposte sono due di tante possibili, e quindi il quesito si presta anche ad una discussione su quale sia lo schema più indicato per rappresentare tali soluzioni.

Etichette: Metodo di forza bruta. Esplorare uno spazio di stati. Rappresentazioni schematiche e grafiche di una situazione.

Codice cifrato

Alex e Betty comunicano utilizzando la seguente sequenza di trasformazioni di ogni parola:



Per esempio, la parola "BEAVER" viene codificata come "WBFCSF".

Betty riceve la parola codificata "PMGEP" da Alex.

Qual è la parola da codificare che Alex ha spedito a Betty?

- A. RIVER
- B. KNOCK
- C. FLOOD
- D. LODGE

Strategia

Il problema può essere risolto utilizzando varie strategie:

- applicando le trasformazioni elencate alle parole RIVER, KNOCK, FLOOD e LODGE, ottenendo quindi:
 - RIVER → REVIR → VIRRE → WJSSF
 - KNOCK → KCONK → ONKKC → POLLD
 - FLOOD → DOOLF → OLFDO → PMGEP
 - LODGE → ...

dopo aver trasformato la terza parola si è trovata la soluzione e si può terminare

- applicando la trasformazione inversa:
 - PMGEP → OLFDO → DOOLF → FLOOD

- applicando la trasformazione inversa e rendendosi conto che l'unica parola con due OO è FLOOD:
 - PMGEP → OLFDO →→ FLOOD
- rendendosi conto che esistono due lettere P, che si trasformeranno in O, e quindi l'unica soluzione possibile è FLOOD:
 - PMGEP →→ FLOOD

Discussione. Il contesto è quello della *crittografia*, tramite la quale i messaggi vengono codificati in messaggi “segreti”; i messaggi segreti devono poi essere decodificati nei messaggi originali. Il processo di codifica-decodifica deve essere tale che è sempre possibile ottenere il messaggio originale da un messaggio segreto. Tuttavia, conoscenze specifiche nell'ambito della crittografia (ad esempio, il fatto che codificare una lettera tramite la lettera successiva è un'istanza del Cifrario di Cesare) non sono necessarie, perché l'insieme di passi da effettuare è descritto nel testo dell'esercizio e reso più chiaro dagli esempi. L'unica nozione necessaria è l'esistenza del concetto di codifica-decodifica, ovvero di meccanismi che trasformano un testo in un altro e viceversa, che si può ritenere di dominio comune.

I termini utilizzati per le trasformazioni possono essere di difficile comprensione, tuttavia. L'espressione “trasla ogni lettera della parola di due posizioni a sinistra” può essere criptica per chi non conosce l'ambito di riferimento, ed è insufficiente anche per le persone più esperte, poiché non include esplicitamente il re-inserimento delle lettere nell'altro lato. Un esempio concreto, quale l'affermazione che la parola “BEAVER” viene traslata nella parola “AVERBE” permette però di risolvere il dubbio.

Il termine “la successiva lettera dell'alfabeto” è forse un'operazione più semplice da comprendere, ma restano comunque dei dubbi: non è ben chiaro cosa succede nel caso della lettera “Z”. Si potrebbe assumere di nuovo un ragionamento circolare e quindi la lettera “Z” viene seguita dalla “A”. Tuttavia, in nessuna delle risposte compare la lettera “Z”, quindi il problema non si pone e questo caso particolare può essere ignorato.

Come può essere visto dal numero di strategie proposte, il problema si presta ad essere risolto con approcci molto diversi uno dall'altro. È sempre risolvibile con l'applicazione sistematica della sequenza di trasformazioni proposte. Tuttavia, è interessante notare che fermarsi a riflettere prima di scegliere quello che sembra essere l'approccio più ovvio può dare origine ad una serie di strategie, più o meno efficaci, per ridurre il numero di operazioni e/o calcoli che devono essere effettuati. Il tipo di ragionamento coinvolto richiede l'individuazione di pattern (schemi) nell'insieme delle operazioni proposte e/o nei dati di input del particolare quesito, per poi utilizzare questi pattern per restringere l'insieme di soluzioni da considerare, fino ad individuare la soluzione in un singolo passaggio come l'unica possibile.

Nel caso particolare di questo problema, è interessante notare che è anche possibile ragionare sul ruolo di ognuna delle operazioni svolte e sull'importanza del loro ordinamento. L'operazione di traduzione di ogni lettera in quella successiva può essere applicata in qualunque ordine, mentre le altre due operazioni danno origine a risultati diversi se ordinate diversamente. Capita che questa osservazione sia il primo passo per individuare la strategia più rapida (si comprende che non dipendendo dalle altre operazioni, questa trasformazione permette di individuare immediatamente la soluzione fra quelle proposte).

Questo tipo di quesiti:

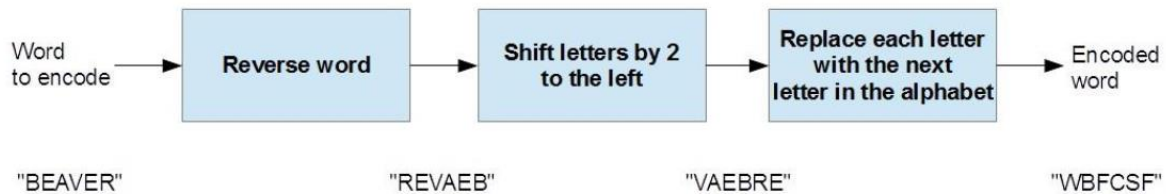
- stimola gli studenti ad affrontare i problemi fermandosi a ragionare sulla loro struttura, prima di cercare di affrontarli applicando un insieme di regole ben note (derivanti dal testo o prese dal proprio bagaglio di conoscenze);
- allena alla ricerca di schemi nei dati, che possono essere utilizzati per organizzare il proprio lavoro e ridurre il numero di operazioni da effettuare; individuare schemi allena alla generalizzazione e alla modellazione, due capacità fondamentali in qualunque disciplina;
- suggerisce che alcuni problemi possono essere decomposti in una sequenza di sottoproblemi, ognuno dei quali può essere affrontato singolarmente.

È facile che questo problema si trasformi in un esercizio di routine, perché è possibile pensare a vari tipi di blocchi e a vari ordini di applicazioni, ottenendo risultati sempre diversi ma la cui soluzione è stereotipata e ripetitiva. Tuttavia, non sono da sottovalutare gli aspetti di comprensione del testo; le trasformazioni possibili sono innumerevoli, il testo usato per descriverle può essere ambiguo, l'esempio fornisce l'informazione mancante. Vengono valutati quindi capacità di comprensione del testo molto sofisticate.

Si noti che in questo caso l'approccio basato su risposta multipla dà un valore aggiunto alla domanda; nel caso di risposta aperta, l'unica strategia possibile è quella dell'applicazione delle regole in forma inversa.

Il quesito è preso dalla competizione *Bebras*, presentato nelle gare del 2015 con il titolo "You won't find it", per una fascia di età compresa nella scuola secondaria di primo grado. Il testo originale è in inglese, a risposta multipla. Viene riproposto qui per completezza.

Beaver Alex and beaver Betty send each other messages using the following sequence of transformations on every word.



For example, the word "BEAVER" is transformed to "WBFCSF".

Beaver Betty receives the encoded message "PMGEP" from beaver Alex.

Question: What did Alex want to say?

RIVER, KNOCK, FLOOD or LODGE

Etichette. Comprensione di un algoritmo. Metodo di forza bruta. Deduzioni logiche e ragionamento.

Numero cifre

Per numerare le pagine di un libro sono state usate in totale 3301 cifre. Le pagine del libro sono:

- A. TRA 1500 E 2000
- B. TRA 2000 E 3000
- C. MENO DI 1000
- D. PIÙ DI 3000
- E. TRA 1000 E 1500

Soluzione: Un approccio semplice, potrebbe essere quello di contare quante pagine hanno i libri di 1000, 1500, 2000 e 3000 pagine:

- Un libro di 1000 pagine ha 9 pagine ad una cifra, 90 pagine con due cifre, 900 pagine con 3 cifre, una pagina con 4 cifre. Il numero totale è: $9 + 90 * 2 + 900 * 3 + 1 * 4 = 2893$
- Un libro di 1500 pagine ha 9 pagine ad una cifra, 90 pagine con due cifre, 900 pagine con 3 cifre, 501 pagine con 4 cifre. Il numero totale è: $9 + 90 * 2 + 900 * 3 + 501 * 4 = 4893$

A questo punto è possibile fermarsi, in quanto il totale proposto, 3301, è compreso fra queste due cifre ed è quindi possibile fermarsi, indicando E come soluzione.

Discussione: L'approccio proposto funziona bene nel problema in questione, perché, dopo aver calcolato due casi particolari, si riesce a vedere qual è la soluzione. È possibile tuttavia utilizzare un approccio algebrico per contare le cifre in un libro la cui pagina finale ha quattro cifre.

Per numerare le prime 999 pagine, sono necessarie $9*1+90*2+900*3$ pagine, ovvero 2889 pagine. A questo punto, il numero di cifre che occorrono per numerare le pagine di un libro con x pagine, se $999 < x < 10000$, è dato dalla formula:

$$\text{numero cifre} = 2889 + (x - 999) * 4$$

Questa formula si può sfruttare in due modi diversi:

- invertendo la formula e ottenendo: $x = (\text{numero cifre} - 2889) / 4 + 999$, da cui risulta che il libro in questione ha 1102 pagine
- oppure, calcolando il numero di cifre per 1000 pagine (2893 cifre), 1500 pagine (4893 cifre) e fermarsi qui, perché 3301 è inferiore a 4893.

Il quesito è stato utilizzato nel test CISIA per Ingegneria, nella sezione Logica e comprensione verbale. I partecipanti al test hanno risposto in maniera corretta nel 27% dei casi, in modo sbagliato nel 25% dei casi, non hanno dato la risposta nel 48% dei casi.

La bassa percentuale di risposte esatte fa riflettere. È possibile che derivi dalla difficoltà di comprendere cosa si intende per “usare le cifre per numerare”. Si potrebbe aggiungere un esempio, come: “per numerare un libro di 20 pagine, sono necessarie 31 cifre”.

Una volta superato questo scoglio, il problema sembra piuttosto semplice.

Sebbene la modellizzazione richiesta sia molto semplice (una semplice relazione lineare), la capacità di identificarla in maniera autonoma è un requisito importante per i corsi di laurea in materie scientifiche e ingegneristiche.

Per questo motivo, chiedere di calcolare il numero di cifre di un libro che ha un determinato numero di pagine può stimolare l’identificazione della relazione lineare, invece di ripetere il calcolo partendo da zero per ogni numero di pagine.

Etichette: Modellizzazione algebrica

Ospiti a cena

Per organizzare una cena, Sara deve parlare con cinque amici: Alicia, Beat, Caroline, David e Emil. Sara può parlare subito con Emil. Tuttavia, per parlare con gli altri amici, è necessario considerare alcuni vincoli:

- Prima di parlare a David, deve parlare con Alicia
- Prima di parlare a Beat, deve parlare con Emil
- Prima di parlare a Caroline, deve parlare con Beat e David
- Prima di parlare a Alicia, deve parlare con Beat e Emil.

In quale ordine Sara deve parlare con i suoi amici se vuole parlare con tutti loro? Scrivete nell'ordine corretto.

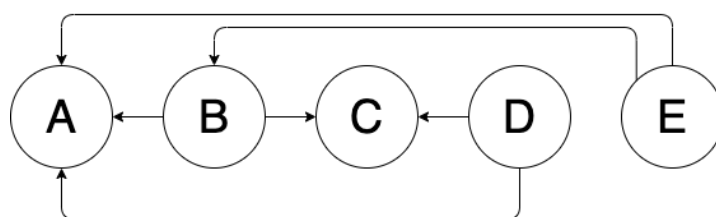
Soluzione: Un semplice approccio potrebbe essere il seguente:

- Sara parla con Emil per primo
- Poi si accorge che può parlare con Beat perché ha già parlato con Emil
- Poi si accorge che può parlare con Alicia, perché ha già parlato con Beat e Emil
- Poi si accorge che può parlare con David, perché ha già parlato con Alicia
- Poi si accorge che può parlare con Caroline, perché ha già parlato con Beat e David

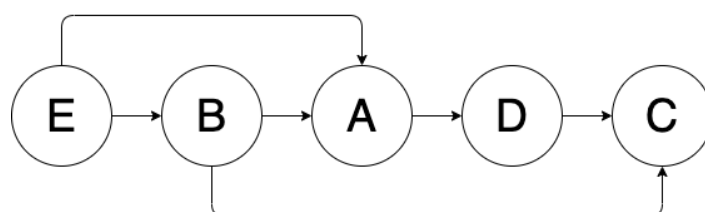
L'ordine corretto è quindi Emil-Beat-Alicia-David-Caroline.

Discussione: Non ci sono particolari aspetti linguistici, se non l'assunzione implicita che Sara deve parlare con le varie persone separatamente.

Questo tipo di problemi può essere rappresentato da un [grafo](#), ovvero un insieme di elementi (detti nodi) che possono essere collegati fra loro a coppie, attraverso linee (lati). In particolare, il grafo che deriva da questo quesito è un *grafo delle dipendenze*, dove i lati sono orientati (sono rappresentati da frecce, non semplici linee) e ogni freccia da un nodo all'altro indica che esiste una dipendenza (temporale) tra i due.



Quello che vogliamo ottenere prende il nome di *ordinamento topologico*, che altro non è che un ordinamento dei nodi del grafo, in modo tale che se un nodo u appare prima di un nodo v nell'ordinamento, non esistono lati che partono da u e arrivano in v .



Alcuni aspetti interessanti relativi all'ordinamento topologico:

- non è un ordinamento totale, in quanto può non essere unico
- è possibile se e solo se il grafo delle dipendenze non contiene un *ciclo*, ovvero un percorso di frecce che permettano di partire da un nodo, attraversare uno o più nodi, e tornare al nodo originale, seguendo l'orientamento delle frecce.

Esistono varie tecniche risolutive per questo problema, la più semplice delle quali è una descrizione più formale del procedimento seguito nella soluzione proposta sopra:

- Si identifica un nodo senza frecce entranti
- Lo si inserisce all'ordinamento
- Si cancella il nodo e tutte le frecce che escono da quel nodo
- Si ripetono le due operazioni precedenti fino a quando tutti i nodi sono stati selezionati.

Se si vuole presentare questo problema come quesito a scelta multipla è opportuno non proporre una scelta fra diverse sequenze, una delle quali è corretta, poiché il problema si ridurrebbe alla verifica delle dipendenze dirette. Piuttosto, è preferibile scegliere fra un insieme di affermazioni giuste/sbagliate sull'ordine. Ad esempio la domanda potrebbe essere:

- Quale della seguente affermazione non è corretta?
 - Prima di parlare a David, deve parlare a Caroline

- Prima di parlare a David, deve parlare con Beat
- Prima di parlare a Caroline, deve parlare a Emil
- Prima di parlare a Alicia, deve parlare ad Emil

È inoltre possibile considerare istanze di questo problema in cui ci sono diversi ordinamenti che soddisfano i requisiti dati (ad esempio se ho i due vincoli: 1. prima di parlare con D, A deve parlare con B; 2. prima di parlare con D, A deve parlare con C, allora entrambi gli ordinamenti ABCD e ACBD sono possibili). Specialmente in casi di questo tipo, è possibile porre domande che chiedono proprietà delle soluzioni, ad esempio il loro numero, invece che identificare l'unica soluzione possibile.

Il quesito è preso dalla competizione *Bebras*, presentato nelle gare del 2015 con il titolo "Party guests", per una fascia di età compresa nella scuola secondaria di primo grado. Il testo originale è in inglese, a risposta aperta. Lo riportiamo qui di seguito per completezza.

To arrange a dinner party Sara the beaver needs to talk to five friends: Alicia, Beat, Caroline, David and Emil.

Sara can talk to Emil right away. However, to talk to her other friends, there are a few points to consider:

- 1- Before she talks to David, she must first talk to Alicia.
- 2- Before she talks to Beat, she must first talk to Emil.
- 3- Before she talks to Caroline, she must first talk to Beat and David.
- 4- Before she talks to Alicia, she must first talk to Beat and Emil.

Question: In what order should Sara talk to all of her friends if she wants to talk to all of them? Write them down in the correct order.

Etichette: Deduzioni logiche e ragionamento.

Teatro

Per illuminare un palcoscenico sono presenti tre fari, uno rosso, uno verde e uno blu. Il colore del palcoscenico dipende da quali fari sono accesi (ON) o spenti (OFF). Questa tabella elenca le possibili combinazioni di colori:

Faro rosso	Faro verde	Faro blu	Colore
OFF	OFF	OFF	Nero
OFF	OFF	ON	Blu
OFF	ON	OFF	Verde
OFF	ON	ON	Azzurro
ON	OFF	OFF	Rosso
ON	OFF	ON	Magenta
ON	ON	OFF	Giallo
ON	ON	ON	Bianco

A partire dall'inizio dello spettacolo, le luci verranno accese e spente seguendo questo schema:

- La luce rossa ripete la sequenza: due minuti spenta, due minuti accesa
- La luce verde ripete la sequenza: un minuto spenta, un minuto accesa
- La luce blu ripete la sequenza: quattro minuti accesa, quattro minuti spenta

Quali saranno i colori del palcoscenico nei primi quattro minuti dello spettacolo?

- BLU-AZZURRO-MAGENTA-BIANCO
- AZZURRO-BLU-ROSSO-MAGENTA
- ROSSO-ROSSO-BLU-BLU
- BLU-VERDE-MAGENTA-ROSSO

Soluzione: Questo problema non presenta una grande varietà di strategie di soluzione, se non la capacità di seguire sequenze di istruzioni, potenzialmente con ripetizioni.

Minuto	Rosso	Verde	Blue	Colore
1	OFF	OFF	ON	Blu
2	OFF	ON	ON	Azzurro
3	ON	OFF	ON	Magenta
4	ON	ON	ON	Bianco

Discussione: Non ci sono particolari problemi di comprensione in questo caso. Viene utilizzato il concetto di ripetizione ciclica e viene chiesto di “eseguire” un programma composto da un insieme di azioni parallele.

Forse questa è la classe che si presta ad un maggior numero di varianti.

- I cicli di ripetizioni possono essere leggermente più lunghi, anche non congruenti (ad esempio, 4 e 3)
- È possibile considerare sequenze di azioni più lunghe (ad esempio, gli “attuatori” possono seguire sequenze di azioni più complesse, come ad esempio “OFF ON OFF OFF, per poi ripetere”
- È possibile fare domande più complesse che richiedano di comprendere periodi di ripetizioni più lunghi, come ad esempio:
 - un ciclo che si ripete ogni tre minuti
 - un ciclo che si ripete ogni quattro minuti
 - chiedere quante volte un certo evento si ripete in un periodo di 60 minuti

Il quesito è preso dalla competizione Bebras, presentato nelle gare del 2015 con il titolo “Theatre”, per una fascia di età compresa nella scuola secondaria di primo grado. Il testo originale è in inglese, a risposta aperta. Viene riproposto qui per completezza.

Three spotlights are used to light the theatre stage in the beavers' forest, a red one, a green one and a blue one.

The colour of the stage depends on which of the three spotlights are turned on. This table shows the possible combinations of colours.

From the beginning of the show, the lights will be switched on and off in this pattern:

The red light repeats the sequence: two minutes off, two minutes on.

The green light repeats the sequence: one minute off, one minute on.

The blue light repeats the sequence: four minutes on, four minutes off.

Question: What will the colour of the stage be in the first 4 minutes of the show? Write the colours out in the correct order.

Etichette: Comprendere ed eseguire insieme di istruzioni.

Codice binario

Si è stabilito un codice, che a ciascuna delle lettere A, B, C, D, E associa una sequenza di caratteri "0" e "1", come indicato nella tabella che segue:

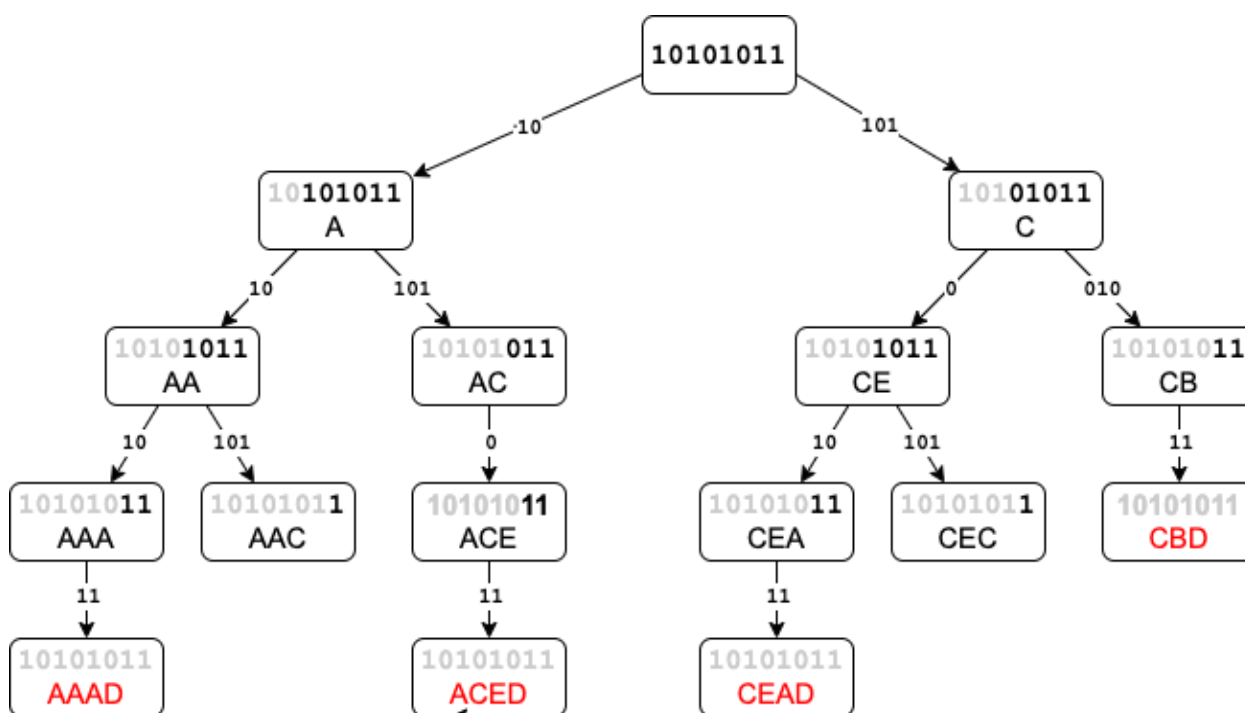
Lettera	A	B	C	D	E
Codifica	10	010	101	11	0

Per esempio, usando questa codifica, il messaggio "EA" diventa la sequenza "010". D'altra parte, osserviamo che la sequenza "010" è anche la codifica del messaggio "B". Dunque "010" può essere decodificato come "EA" oppure come "B".

Quanti modi diversi ci sono di decodificare la sequenza "10101011"?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

Soluzione: In questo caso, è possibile prevedere un albero di soluzioni decodificando a mano a mano da sinistra verso destra (in modo naturale):



Oppure notare che l'unico modo per decodificare la stringa nella sua interezza è interpretare l' "11" finale tramite una lettera "D", e ridursi al sottoproblema "101010". A quel punto è facile vedere che il sottoproblema può essere interpretato:

- come "AAA"
- come "ACE" oppure "CEA"
- come "CB"

Discussione: Le parole codificare/decodificare (mia traduzione) costituiscono l'unica ambiguità; il concetto di codifica è da un lato ben noto, dall'altro si presta a innumerevoli varianti. Ancora una volta, la difficoltà viene superata con uno o più esempi.

Il problema è ispirato a un quesito della competizione Bebras, presentato nelle gare del 2015 con il titolo "Fireworks", per una fascia di età compresa nella scuola secondaria di primo grado. Il testo originale è in inglese, a risposta aperta. Per completezza, riproponiamo qui sotto il quesito originale.

Two beavers live in lodges separated by a large forest.

They decide to send messages to each other by shooting **fireworks** into the sky above the trees.

Each message is a sequence of words, though the beavers only know five different words.

The beavers can shoot two types of **fireworks**, one after the other, and know the following codes:

Word	Code
Log	 
Tree	  
Rock	  
River	 
Food	

For example, to send the (rather strange) message "food, log, food", a beaver would shoot:



Question?

How many **different** meanings can the following sequence of **fireworks** have?



0, 1, 2, 3, or 4

Etichette: esplorare un insieme di stati, trarre un insieme di conseguenze logiche

L'isola di Smullyan

Esiste una intera classe di problemi che prende il nome di *Isola di Smullyan*, dal nome dell'ideatore. L'isola è abitata da cavalieri, che dicono sempre la verità, e da furfanti, che dicono sempre il falso. Ogni problema presenta un insieme di affermazioni che sono state fatte da alcuni individui che abitano l'isola e chiede cosa si può dedurre da tali affermazioni a proposito della categoria alla quale ciascuno degli individui appartiene. La soluzione si ottiene utilizzando ragionamenti deduttivi basati sulle regole descritte nel nucleo tematico *Logica, ragionamento e linguaggio naturale* di questo Quadro di riferimento. Le domande di questo tipo si trovano al confine fra l'esercizio di logica e i problemi veri e propri: possono essere affrontate con un approccio sistematico standard, che esplora tutti i casi possibili, come fossero esercizi, ma un tale approccio può risultare troppo lungo se le domande sono complesse e, in tal caso, è utile tentare esplorazioni e cercare opportune strategie per ridurre la complessità. Vediamo un esempio.

Problema 1:

Fra tre abitanti A, B, C dell'Isola di Smullyan, si svolge il seguente dialogo:

A: Fra noi c'è almeno un furfante (Affermazione 1)

B: Fra noi c'è almeno un cavaliere (Affermazione 2)

Cosa possiamo dedurre da questo dialogo?

Consideriamo l'abitante A: se è un furfante, è vero che esiste almeno un furfante fra A, B, C. Quindi A ha detto il vero e quindi non può essere un furfante. Quindi A è un cavaliere. Poiché A è un cavaliere, esiste almeno un cavaliere. Ma questo significa che B ha detto il vero, quindi anche B è un cavaliere. Poiché esiste almeno un furfante, questi deve essere C.

Un modo alternativo e sistematico per convincersi di questo fatto è costruire una tabella che contiene tutti i possibili casi che si possono presentare, verificare in ciascun caso se le affermazioni sono vere oppure false, da questo dedurre se chi fa le affermazioni è un cavaliere o un furfante e infine controllare se ci sono contraddizioni. Qui sotto si vede una tale tabella per il problema 1. La descriviamo brevemente.

Nelle prime tre righe abbiamo rappresentato tutti i casi possibili per i tre individui A, B, C.

I due casi possibili per A sono indicati nella prima riga. Poi, per ogni scelta di A, ci sono due casi possibili per B, che si vedono nella seconda riga. Infine, nella terza riga sono indicate le scelte possibili per C. In tutto ci sono $2 \times 2 \times 2 = 8$ casi.

Esaminiamo ora la prima colonna. Nella quarta riga si legge che l'affermazione 1 è vera. Infatti, nel caso considerato c'è almeno un furfante fra i tre (anzi sono tutti e tre furfanti). Da questo segue che A ha detto la verità e quindi A è un cavaliere (lo abbiamo scritto nella cella che sta sotto).

Ma ciò è in contraddizione con il caso in cui siamo, dunque tale caso non è possibile. La contraddizione è segnalata nella tabella dal carattere rosso, grassetto e grande. Scendendo ulteriormente nella colonna vediamo che, nel caso in considerazione, la seconda affermazione è falsa, da cui segue che B ha detto il falso e pertanto è un furfante. Questo non dà una contraddizione, ma lo abbiamo detto per completezza.

In modo analogo si procede per le altre colonne e si trova così che in ciascuna, fuorché nella penultima, si trova almeno una contraddizione; pertanto è possibile soltanto il caso della penultima colonna, in cui A e B sono cavalieri e C è un furfante.

A	Fur.	Fur.	Fur.	Fur.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.
B	Fur.	Fur.	Cav.	Cav.	Fur.	Fur.	Cav.	Cav.
C	Fur.	Cav.	Fur.	Cav.	Fur.	Cav.	Fur.	Cav.
L'affermazione 1 è	Vera	Vera	Vera	Vera	Vera	Vera	Vera	Falsa
e ne segue che A è un	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Fur.
L'affermazione 2 è	Falsa	Vera	Vera	Vera	Vera	Vera	Vera	Vera
e ne segue che B è un	Fur.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.	Cav.

Consideriamo ora un altro problema:

Problema 2: Un abitante dell'isola di Smullyan fa la seguente affermazione:

A: lo sono un furfante se e solo se B è un cavaliere (Affermazione 1)

Si può stabilire se A è un furfante o un cavaliere? Si può stabilire se B è un furfante o un cavaliere?

Utilizziamo l'approccio basato sulle catene di deduzioni. Ci sono due casi possibili:

- Se **A è un cavaliere**, allora l'affermazione 1 è vera. Essendo una doppia implicazione, il fatto che l'enunciato di sinistra ("lo sono un furfante") sia falso, implica che anche l'enunciato di destra ("B è un cavaliere") sia falso. Quindi in questo caso, B è un furfante.
- Se **A è un furfante**, allora l'affermazione 1 è falsa. Essendo A un furfante, allora B non può essere un cavaliere, altrimenti l'affermazione sarebbe vera.

In conclusione, B è in ogni caso un furfante, e questo è dunque vero. Non è possibile invece dedurre se A è un furfante o un cavaliere.

In alternativa, costruendo la tabella dei casi possibili, che vediamo qui sotto, si osserva che essa contiene due contraddizioni, che sono evidenziate in carattere rosso e grassetto. Nei due casi che rimangono possibili, ossia le colonne evidenziate, B è sempre un furfante. Non è invece possibile stabilire se A è un furfante o un cavaliere, poiché entrambi i casi sono compatibili con l'affermazione fatta.

A	Fur.	Fur.	Cav.	Cav.
B	Fur.	Cav.	Fur.	Cav.
L'affermazione 1 è	Falsa	Vera	Vera	Falsa
e ne segue che A è un	Fur.	Cav.	Cav.	Fur.